

6.1 평행하게 운동하는 전하 사이의 힘

먼저 진행 방향과 수직으로 r 만큼 떨어져서 같은 v 의 속도로 나란히 달리는 두 전하 사이의 힘과 그에 의한 운동을 살펴볼 것이다. 전하 Q_a 는 고정되어 전자기장에 의하여 운동에 영향을 받지 않고, Q_b 는 m_0 의 질량을 가진 것으로 가정할 것이다.

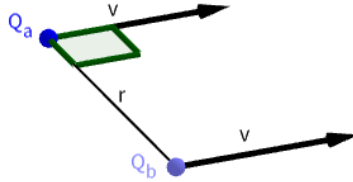


Figure 80: 평행하게 운동하는 두 전하

앞서 등속도로 운동하는 전하에 의한 전기장을 표현하는 퍼셀의 공식 $\vec{E}_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p$ 을 소개하였다. 이 경우는 $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta = 1$ 이므로, Q_a 의 정지 상태에서의 전기장을 E_0 라고 할 때,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \hat{r} = \frac{\gamma q \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \gamma \vec{E}_0$$

임을 알 수 있다. 이때 Q_b 의 정지 질량은 m_0 일 때, 관성 질량은 $m = \gamma m_0$ 이므로 가속도는 $\vec{a} = \gamma \frac{\vec{E}_0}{m} = \frac{\vec{E}_0}{m_0}$ 이 되는 것으로 보인다. 이것을 다시 Q_a, Q_b 와 함께 움직이는 관성계에서 Q_b 의 움직임을 관찰하는 경우를 생각해보자, 이때, Q_a 와 Q_b 는 정지한 상태로 보일 것이며, 모든 관성계에서 관찰하는 물리 법칙은 동일하다는 상대론에 따르면 Q_b 가 느끼는 전기장은 E_0 이며, Q_b 의 정지 질량은 m_0 따라서 Q_b 가 느끼게 되는 가속도는 $\frac{\vec{E}_0}{m_0} = \vec{a}$ 로서 앞서의 정지한 관성계에서 측정한 가속도와 동일하게 계산된다. 그러나, 이는 상대론과 모순이다. 정지한 관성계에서 볼 때 v 속도로 움직이는 관성계에서는 시간이 $1/\gamma$ 의 속도로 천천히 흐르는 것으로 보이며, 이는 가속도의 경우 γ 배의 시간이 흐른 뒤에 $1/\gamma$ 만큼의 속도 변화가 생기는 것을 관찰하게 된다는 것을 의미한다. 따라서 가속도가 γ 배만큼 작게 관찰 되어야 한다. 그럼에도 같은 양으로 계산된다는 것은 어떤 이유에선가 γ 배만큼 크게 계산 되었다는 것을 의미한다. 이 관계는 앞서 라모

공식을 유도할 때 사용한 $\vec{a}' = \gamma^2((\gamma-1)(\vec{a} \cdot \hat{v})\hat{v} + \vec{a})$ 식을 통해서도 확인할 수 있다. 정확히는 이 식의 반대 방향의 경우인데, 반대 방향으로의 식을 구해보면, 앞서 구한 상대론 적인 속도 합식

$$\vec{u} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{u}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right)$$

과

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\gamma t - \gamma \beta \frac{x}{c} \right) = \gamma \frac{dt}{dt} - \frac{1}{c^2} \gamma v \frac{dx}{dt} = \gamma - \gamma \frac{vv}{c^2} = \frac{1}{\gamma}$$

로부터

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{u}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ \vec{v} + d\vec{v} &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(\frac{d\vec{v}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (d\vec{v}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ d\vec{v} &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(\frac{d\vec{v}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (d\vec{v}' \cdot \hat{v}) \hat{v} - \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2} \vec{v} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(\frac{d\vec{v}'}{\gamma} + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{v^2}{c^2} \right) (d\vec{v}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(\frac{d\vec{v}'}{\gamma} + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) (d\vec{v}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(\frac{d\vec{v}'}{\gamma} + \frac{\gamma^2 - \gamma + 1 - \gamma^2}{\gamma^2} (d\vec{v}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(\frac{d\vec{v}'}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma^2} (d\vec{v}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(d\vec{v}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (d\vec{v}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \end{aligned}$$

이므로, $d\vec{v}'$ 가 무한소 일 때

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2}} \left(\frac{d\vec{v}'}{dt'} \frac{dt'}{dt} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{d\vec{v}'}{dt'} \frac{dt'}{dt} \cdot \hat{v} \right) \hat{v} \right) \\ \vec{a} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\vec{a}'}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\vec{a}'}{\gamma} \cdot \hat{v} \right) \hat{v} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \left(\vec{a}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{a}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \end{aligned}$$

가 된다. 이러한 구체적인 가속도 변환 식을 통해서도 각기 다른 관성계에서 관찰하는 \vec{a} 와 \vec{a}' 의 관계를 확인할 수 있다. 하지만 이런 상대론 적인 가속도 공식을 이용할 때에는 주의할 점이 있다. 이 공식들은 물체가 v 의 속도로 움직일 때, 물체가 v 의 속도로 움직이는 것으로 관찰하는 표시 없는 정지 관성계와 그 물체가 정지한 것으로 보이는 / 표시한 v 속도로 움직이는

관성계 사이의 변환 식이다. 그 외의 경우에는 물리적으로 올바른 결과가 나오지 않는다. 실은 변환 경로에 따라 다른 값이 나오며 이는 물리적으로 모순이다. 따라서, 이 공식 전체를 쓸 수 없거나 앞서의 제한대로 사용해야 함을 알 수 있고 제한대로 사용했을 때에는 물리적으로 모순 없는 해답을 구할 수 있다. 물론 응용하여 보다 일반적인 경우를 다룰 수 있으며 그 방식은 추후 소개 하겠지만 상대론 문제를 다룰 때에는 항상 어떤 관찰자의 입장 인지를 주의해서 사용해야 한다. 상대론 이론이면서 특정한 관찰자를 적시 할 수 없는 이론이라면 아마 틀린 해석에서 출발한 이론일 것이다. 상대론은 기계적인 수학으로는 다룰 수 없으며 항상 관점 변화에 따른 물리량의 의미와 그 변화에 주의해서 물리적으로 올바른 해석에 따라 수학을 사용해야 한다. 상대론을 기계적인 수학 논리로서만 다루면 즉시 도달하게 되는 것이 쌍둥이 역설 같은 것들이다.

위 식을 사용해서도 보다 일반적인 정지 관성계가 아니면서도 물체가 움직이는 것으로 관찰되는 관성계로 부터의 가속도 변환을 하는 방법은 존재하며 그것도 차후 소개 하게 되겠지만, 그전에 보다 일반적인 위 상황을 직접 다룰수 있는 가속도 변환 공식을 소개 하겠다. 그것은 앞서의 $\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma}$ 을 보다 일반적인 경우로 확장하는 것으로 구할 수 있다.

시간에 관한 로렌츠 변환 $t' = \gamma t - \gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2}$ 과 역변환 $t = \gamma t' + \gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}'}{c^2}$ 로 부터,

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right) \rightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)}$$

과

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2} \right) \rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2} \right)}$$

을 구할 수 있다. $\vec{u}' = 0$ 이고, $\vec{u} = \vec{v}$ 일 때에는 지금까지 사용한 공식과 동일하다. 이를 이용 하여 가속도 변환 공식을 구하면,

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \frac{1}{1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{u}' \cdot \vec{v}) \vec{v} \right) \\
\vec{a} &= \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})} \left(\left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}} \right) + \frac{1}{(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})} \left(\left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \frac{-1}{c^2} \frac{0+\vec{v}\cdot\vec{a}'}{(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})^2} + \frac{1}{(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})} \left(\frac{\vec{a}'}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \right) \\
&= \frac{-1}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})^3} \left(\left(\frac{\vec{u}'}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} - \left(\frac{\vec{a}'}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \left(1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2} \right) \right) \\
&= \frac{-1}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})^3} \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} \frac{\vec{u}'}{\gamma} - \frac{1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}}{\gamma} \vec{a}' + \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2} \right) \vec{v} \right) \\
&= \frac{-1}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})^3} \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} \frac{\vec{u}'}{\gamma} - \frac{1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}}{\gamma} \vec{a}' + \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right) \vec{v} \right) \\
&= \frac{-1}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})^3} \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} \frac{\vec{u}'}{\gamma} - \frac{1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}}{\gamma} \vec{a}' + \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma^2(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})^3} \left(\left(1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2} \right) \vec{a}' - \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}'}{c^2} \vec{u}' - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right)
\end{aligned}$$

이며, 가속도에 대한 역변환을 구하면,

$$\begin{aligned}
\vec{u}' &= \frac{1}{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma} - \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \\
\vec{a}' &= \frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d\vec{u}'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma} - \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma} - \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}} \right) + \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma} - \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma} - \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \frac{-1}{c^2} \frac{0-\vec{v}\cdot\vec{a}}{(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^2} + \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^2} \left(\frac{\vec{a}}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^3} \left(\left(\frac{\vec{u}}{\gamma} - \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \left(\frac{\vec{a}}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^3} \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \frac{\vec{u}}{\gamma} + \frac{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}{\gamma} \vec{a} + \left(-\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2} \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2} \right) \vec{v} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^3} \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \frac{\vec{u}}{\gamma} + \frac{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}{\gamma} \vec{a} + \left(-\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2} \right) \vec{v} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^3} \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \frac{\vec{u}}{\gamma} + \frac{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}{\gamma} \vec{a} + \left(-\frac{v^2}{c^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma^2(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2})^3} \left(\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2} \right) \vec{a} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \vec{u} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right)
\end{aligned}$$

이다. 역시 $\vec{u}' = 0$ 이고, $\vec{u} = \vec{v}$ 일 때에는 앞서의 공식들과 일치함을 볼 수 있다.

이제, 이 공식들을 바탕으로 운동에 대한 분석을 좀 더 자세히 해보기로 하면, v 속도로 Q 들과 나란히 달리는 / 관성계에서는 전기장만 존재하지만 정지한 관성계에서는 움직이는 Qa 전하에 의한 자기장도 존재하며 이

자기장 또한 Qb의 움직임에 영향을 끼친다. 따라서, Qb의 움직임은 그 위치에서의 전기장에 의한 힘과 자기장에 의한 힘의 합력이며, 전기장 단일 요인에 의한 힘이 아닌 전기장과 자기장에 의한 합력에 의한 결과가 / 관성계에서의 전기장 만에 의한 결과와 일치하는 것으로 상대성 원리가 유지된다. 즉 자기장이라는 현상 자체가 상대성 원리를 성립 시키기 위해 반드시 필요한 요인 중 하나이다. 물론 이 자기장에 의한 요인은 전기장의 효과와는 반대 방향으로 감소 시키는 방향이다. 이 자기장의 효과를 추가하여 다시 계산해 보기로 한다.

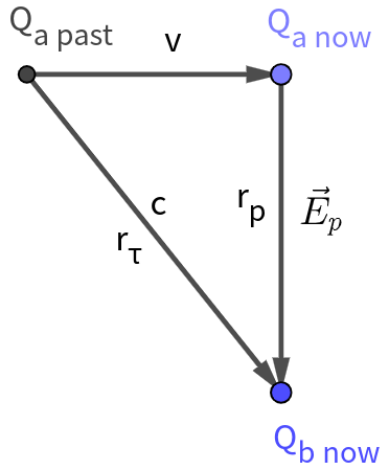


Figure 81: 운동하는 전하에서의 r과 E의 관계

전기장과 자기장에 의해 전하가 받는 힘은 전통적으로 로렌츠 힘 공식 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 으로 표현된다. 앞서 추가했던 편향력 항은 나중에 다루기로 한다. 이때 자기장 B는 어떤 점 전하가 원천일 경우 $\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E}$ 이고 $|\hat{r} \times \vec{E}_p| = \frac{v}{c} E_p$ 이므로,

$$\vec{F} = q(\vec{E}_p + \vec{v} \times \vec{B}) = q \left(\vec{E}_p + \vec{v} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) \right) = q \vec{E}_p \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

임을 확인할 수 있다. 따라서, 자기장에 의한 효과를 더할 경우 필요한 $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$ 배 만큼 전기장에 의한 효과를 약화 시키는 것으로 상대성 원리를 만족 시키는 것을 확인하게 된다.

여기까지가 퍼셀의 책에서 정확히 같은 방법으로 다루어 졌던 부분이다. 그런데, 퍼셀은 여기까지만 직접적으로 다루고 지금부터 내가 다룬 부분은 간접적으로 언급만 하고 지나갔었다. 문제의 그 부분은 일렐로 나란히 달리는 두 전하의 경우이다.

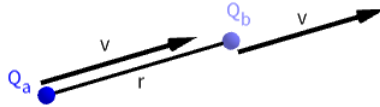


Figure 82: 일렐로 운동하는 두 전하

두 전하가 일렐로 연달아 달리는 경우에는 나란히 달리는 경우와는 다른 한 가지 요소가 더 추가되는데 바로 상대론적인 길이 수축 효과이다. 그리고, 퍼셀의 공식 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p$ 에서 $\theta=0$ 인 경우이므로 분모는 1 분자는 $1/\gamma^2$ 이 되어, 함께 움직이는 관성계에서 느끼는 경우보다 전기장의 강도는 γ^2 배 만큼 약해지게 되지만, 이때 거리가 $1/\gamma$ 로 축소되므로 전체 전기장 강도는 상쇄되어 동일하게 된다. 이때, γ 배만큼 관성 질량이 늘어나므로 가속도는 그만큼 줄게 될 것이다. 그러나, 정지한 관성계와 움직이는 관성계에서의 가속도를 비교해 보면, 움직이는 관성계에서의 a' 은 정지한 관성계에서 γ 배 만큼 느린 시간에 걸쳐 γ 배 만큼 느린 속도로 가속되므로 γ^2 배 만큼 작은 a 로 보이게 되는 것은 앞서 지적하였다. 그런데, 그 가속도가 진행 방향으로의 가속도라면 느려진 속도에 길이 수축까지 작용하여 다시 γ 배 만큼 작아지게 된다. 그 관계식은 앞서 구한 대로 $\vec{a}' = \gamma^2((\gamma - 1)(\vec{a} \cdot \hat{v})\hat{v} + \vec{a})$ 과 $\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\vec{a}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{a}' \cdot \hat{v})\hat{v} \right)$ 로서 이 경우 $\vec{a} = \frac{1}{\gamma^3} \vec{a}'$ 이다.

이 경우에도 수평의 경우와 마찬가지로 γ 배의 상대론적 관성 질량 증가 효과 외에 추가로 γ^2 배 만큼 가속도를 줄여주는 효과를 필요로 함을 알 수 있다.

그래서, 나는 다음과 같은 착안을 하였다. 사실 간단한 해결책이다. 그저 전기장에 의한 힘에 모든 방향에 대하여 γ^2 만큼 작게 하는 요인으로서

수평 방향에서의 자기력과 같은 역할을 해줄 새로운 힘의 추가를 고려해 보았다. 그것이 수학적으로도 오히려 깔끔하다.

앞서 움직이는 전하에 의한 자기장으로 인한 힘을 $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right)$ 로 표현 했었다. 이를 익숙한 BAC-CAB 룰로 표현하면 $\vec{v} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) = \frac{\hat{r}_\tau}{c} (\vec{v} \cdot \vec{E}_p) - \vec{E}_p (\vec{v} \cdot \frac{\hat{r}_\tau}{c})$ 로 두 항으로 분해 할 수 있다. 이 중 $-\vec{E}_p (\vec{v} \cdot \frac{\hat{r}_\tau}{c})$ 항을 '운동하는 전하에서의 r과 E의 관계' 그림을 이용하여 분석하면, $-\vec{E}_p (\vec{v} \cdot \frac{\hat{r}_\tau}{c}) = -\vec{E}_p \left(\frac{v}{c} \hat{v} \cdot \hat{r}_\tau \right) = -\vec{E}_p \frac{v^2}{c^2}$ 따라서

$$\vec{E}_p \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \vec{E}_p - \vec{E}_p \left(\vec{v} \cdot \frac{\hat{r}_\tau}{c} \right) = \vec{E}_p + \vec{v} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) - \frac{\hat{r}_\tau}{c} (\vec{v} \cdot \vec{E}_p)$$

임을 알 수 있다.

여기서, 두 전하가 나란히 달리는 경우에는 $\frac{\hat{r}_\tau}{c} (\vec{v} \cdot \vec{E}_p) = 0$ 이고 이것이 익숙한 상황이지만, 두 전하가 일렬로 달리는 경우에는 $\vec{v} \cdot \vec{E}_p = vE_p$ 로서 해당 항이 남게 됨을 보게 된다. 그리고, 일렬로 달릴 때에도 필요한 보정 항의 크기는 $\frac{1}{\gamma^2}$ 배를 곱해주는 것인데 이는 평행에서의 경우와 마찬가지로 $-\vec{E}_p \frac{v^2}{c^2}$ 를 더해주는 것이며, 이는 $\frac{\hat{r}_\tau}{c} = \frac{v}{c}$ 인 경우 $-\frac{\hat{r}_\tau}{c} (\vec{v} \cdot \vec{E}_p)$ 을 더해주는 것이다.

여기서, 나는 상대론 적인 효과로 발생하는 전체 힘에 대한 원래의 표현이 $\vec{v} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right)$ 이 아니라, 수평으로 나란하게 움직이는 경우와 일직선으로 나란하게 움직이는 경우를 동시에 표현 할 수 있는 방법으로서 $-\vec{E}_p \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{v}}{c^2} \right) = \vec{v} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}_p)$ 이 아닌가 하는 추측을 하게 되었다.

이 추측을 실제로 확인해 보기 위해서는 두 전하 간에 속도차가 있는 경우를 다루어야만 할 것이다.

6.2 속도 차이가 있는 두 전하사이의 힘

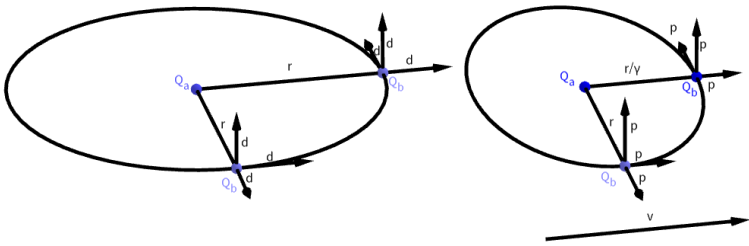


Figure 83: 속도 차이가 있는 두 전하

왼쪽의 그림은 전하 Q_a 주위 원 궤도를 d 의 속도로 공전하는 Q_b 를 그린 것이다. 이 문제는 처음에 공전의 경우를 다루기 위해 고안한 것이기 때문에 원 궤도를 그려보았지만, 실은 Q_a 주위 임의의 위치에서 임의의 방향으로 d 의 속도로 움직이는 Q_b 를 다루는 것이 목적이다.

이 분석에는 세 가지 관성계가 등장한다. 하나는 정지 관찰자 시점이고 0 또는 p 표시가 붙은 물리량으로 대체로 표시 될 것이다. 그리고 두 번째는 Q_a 전하가 움직이는 속도인 v 관성계의 시점으로서 아무 표시가 없거나 v 표시를 할 것이다. 마지막으로 Q_a 와 v 관성계 기준으로 d 의 속도차를 가지고 운동하는 Q_b 전하와 함께 움직이는 시점인데, 이 속도는 정지 관찰자 기준으로 u 로 표기 할 것이므로 u 표시가 붙은 물리량들로 대체로 표시될 것이다. 예를 들어 아무 표시가 없는 로렌츠 인자 γ 의 경우는 v 관성계를 다루는데 필요한 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 이다. 그러나, 가끔 앞의 원칙과 다른 이름을 부여 할 때도 있는데 그 경우에는 따로 명시를 할 것이다.

편의상 Q_a 와 Q_b 의 간의 거리는 $r=1$ 이라고 가정하자. 이 구조는 v 관성계 자체의 시점에서는 왼쪽 그림으로 보이겠지만 정지 관찰자, v 관성계 기준으로 왼쪽으로 $-v$ 의 속도로 스쳐 지나가는 관찰자의 입장에서는 오른쪽의 그림처럼 보이게 된다. Q_a 는 v 의 속도로 움직이며, Q_b 는 다시 Q_a 와 p 의 상대 속도를 가지고 움직이는 것으로 보이게 된다. 사실 d 는 p/γ 이라고 할 수 있는데 자주 사용할 예정이라 따로 d 라는 이름을 부여 하였다. 그리고, 왼쪽의 Q_a 와 Q_b 간의 거리 r 은 오른쪽 그림에서 진행 방향 성분은 $1/\gamma$ 배로 수축되게 된다.

Qa의 속도는 v 이고 Qb의 속도는 $\vec{u} = \vec{v} + \vec{p}$ 이다. 그리고, 앞서 구한 상대론적 속도 합 공식에 따라 $\vec{u} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}} \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \hat{v} \right)$ 이기도 하다. 따라서 앞서 dv 에 대하여 하였던 비슷한 계산을 응용하면,

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{p} &= \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}} \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ \vec{p} &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}} \left(\vec{d} + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \end{aligned}$$

이다. p 는 사용되지 않으며 그저 흥미로 구한 것이지만 d 는 요긴하게 사용되며, 앞서의 상대론적 속도차 공식을 이용하면 d 는,

$$\vec{d} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma} - \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{u} \cdot \hat{v}) \hat{v} \right)$$

이다. 계속하여 기본적으로 필요한 몇 가지 수식들을 미리 준비해 둔다.

$\gamma = \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, 그리고 $\gamma_d = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2}}}$ 들이다. 이때

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \cdot \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \left(v + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \right) \hat{v} \right) \cdot \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \left(v + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \right) \hat{v} \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d^2}{\gamma^2} + \left(v + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \right)^2 + 2 \frac{1}{\gamma} \left(v + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \right) (\vec{d} \cdot \hat{v}) \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d^2}{\gamma^2} + \left(v^2 + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2} (\vec{d} \cdot \hat{v})^2 + 2v \frac{\gamma-1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \right) + \left(2 \frac{v}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma^2} (\vec{d} \cdot \hat{v})^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d^2}{\gamma^2} + v^2 + \frac{2v\gamma-2v+2v}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) + \frac{\gamma^2-2\gamma+1+2\gamma-2}{\gamma^2} (\vec{d} \cdot \hat{v})^2 \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d^2}{\gamma^2} + v^2 + 2v(\vec{d} \cdot \hat{v}) + \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} (\vec{d} \cdot \hat{v})^2 \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d^2}{\gamma^2} + v^2 + 2v(\vec{d} \cdot \hat{v}) + (\vec{d} \cdot \hat{v})^2 - \frac{1}{\gamma^2} (\vec{d} \cdot \hat{v})^2 \right) \\ &= \frac{(v + \vec{d} \cdot \hat{v})^2 + \frac{d^2 - (\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{\gamma^2}}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2} \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}
\gamma_u &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{(v + \vec{d} \cdot \hat{v})^2 + d^2 - (\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v + \vec{d} \cdot \hat{v}}{c}\right)^2 - \frac{d^2 - (\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{c^2 \gamma^2}}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2}}} \\
&= \frac{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}}{\sqrt{1 + 2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2} + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2} - 2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2} - \frac{(\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d^2 - (\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{c^2}}} \\
&= \frac{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2 (\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{(\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{c^2} - \frac{d^2}{c^2} + \frac{(\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{c^2} + \frac{v^2 d^2}{c^4} - \frac{v^2 (\vec{d} \cdot \hat{v})^2}{c^4}}} \\
&= \frac{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{d^2}{c^2} + \frac{v^2 d^2}{c^4}}} \\
&= \frac{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2}}} \\
&= \gamma \gamma_d \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

이를 바탕으로 다음의 분석이 가능해진다.

이 운동은 앞서 언급한 대로 세 가지 다른 관점에서 정의될 수 있다. 하나는 정지 관성계 즉 Qa가 v, Qb가 u의 속도로 움직이는 것으로 관찰하는 정지 관성계와, Qa는 정지 Qb는 d의 속도로 움직이는 것으로 관찰하는 v 관성계, 그리고 Qa는 -d (-d는 임시로 칭하는 이름일 뿐 정확하지는 않으며 정확하게는 이후 논할 것이다), Qb는 정지한 것으로 관찰하는 u 관성계의 관점들이다. 고전 역학에서는 그 세 관성계의 관계와 그 변환이 단순한 덧셈이면 충분하지만 상대론에서는 그 변환은 로렌츠 변환이고 그 관계는 상대론적 속도합을 이용하여 표현하여야 한다. 전자기력이 상대론적으로 일관적이라면 이 모든 관성계에서 모순 없이 기술되어야 한다. 모순이 없다는 것은 어느 한 관성계에서 구한 전자기력에 의한 운동을 다른 관성계에서 기술할 때 그 관성계에서의 전자기력에 의한 운동과 동일해야 한다고 정의할 수 있을 것이다.

앞서 정지 관성계에서 물체의 운동을 기술할 때 전기장 외에 자기장이 등장하고 거기에 덧붙여 새로운 힘/가속도의 가능성을 확인하였다. 그러한

힘을 규정하는 방법으로 나는 다음의 과정을 고안해 보았다.

조금 전에 규정한 u 관성계에서의 관찰을 생각해보면, u 관성계에서는 Qb 가 정지해 있으므로 Qb 의 운동 항을 필요로 하는 자기장에 기인한 힘이나 앞서 추정된 새로운 힘 등이 발생하지 않고 Qb 가 받는 힘은 온전히 -d 의 속도로 움직이는 Qa 가 발생 시키는 전기장에 의한 힘 뿐이다. 그리고, u 관성계에서 Qb 의 질량은 정지 질량이므로 전기장만 알면 Qb 의 가속도 또한 알 수 있다. 이를 a' 이라 한다면 이는 앞서 준비한 가속도 변환 공식 $\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\vec{a}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{a}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right)$ 에 의하여 정지한 관성계에서의 가속도로 변환할 수 있다. 여기에 정지 관성계에서의 Qb 의 상대론적인 관성 질량 γ_u 을 곱하면 정지한 관성계에서 Qa 를 원천으로 하는 장에 의하여 Qb 가 받는 총 힘을 구할 수 있다. 이 총 힘에서 Qa 가 발생 시킨 전기장의 정지 관성계 표현에 의한 순수한 쿨롱 힘을 빼면 그 외의 힘을 구할 수 있으며, 그 나머지 힘은 Qa 가 발생 시킨 자기장에 의한 힘과 앞서 추정된 운동 방향 새로운 힘의 합력 일 것이다. 이것이 올바른 생각 인지를 확인해 보기로 한다.

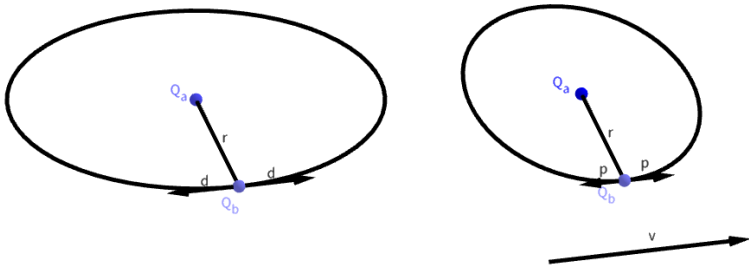


Figure 84: 측면에서의 나란한 운동

우선 Qa 와 Qb 가 진행 방향 v에 수평으로 나란한 위치에 있을 때 Qb 가 Qa 에 대하여 d 의 상대 속도이고 d 의 방향은 v 의 방향과 같은 경우를 분석해 볼 것이다.

이 경우, v 와 d 의 방향은 일치하므로 $\vec{v} \cdot \vec{d} = vd$ 이고, $\vec{u} = \frac{v+d}{1+\frac{vd}{c^2}} \hat{v}$ 이다.

그리고 가속도는 움직이는 방향과 수직이므로, $\vec{a}' \cdot \hat{v} = 0$ 이다. 그런데 가속도 변환 공식은 앞서 언급한 것처럼 분석하고자 하는 물체가 정지해 있는 관성계와 그 물체를 관찰하는 관성계 사이에서만 완전히 신뢰할 수 있으므로, 계산의 출발점은 물체가 움직이는 관성계인 u 관성계에서의 가

속도를 출발점으로 삼아야 한다.

u 관성계에서 Qb 위치에서의 전기장은, 퍼셀의 공식 $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta = 1$ 이고 $r_u = r_v$ 로 r 은 변하지 않는다. 그리고, v 관성계와 u 관성계 사이의 상대 속도는 d 이다. 나중에 설명하겠지만 두 관성계 사이에는 위그너 회전이 적용되므로 d 의 방향 등의 물리량의 방향은 양 관성계에서 다르게 보일 수 있지만 그 크기나 각 물리량들 간의 상대적인 관계는 변하지 않는다. 그리고, 이 경우는 d 와 v, u 의 방향이 모두 같으므로 위그너 회전도 필요 없는 경우이다. 이를 바탕으로 u 관성계에서 느끼는 Qa 에 의한 전기장을 계산해 보면, v 관성계에서 측정한 Qa 에 의한 전기장의 크기를 $\vec{E}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = 1\hat{r}$ 이라고 한다면, u 관성계에서 Qb 위치에서의 크기는 $\vec{E}_d = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_d^2}} \hat{r} = \gamma_d \vec{E}_v = \gamma_d \hat{r}$ 임을 알 수 있다.

이때 Qb 의 전하량과 정지 질량을 1 로 두면 Qb 가 받는 가속도는 u 관성계에서, $\vec{a}' = \gamma_d \hat{r}$ 가 된다.

여기에 앞서 구한 가속도 변환 공식 $\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\vec{a}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{a}' \cdot \hat{u}) \hat{u} \right) \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{a}'}{\gamma_u^2}$ 을 적용하여 정지 관성계에서 관찰하는 Qb 의 가속도를 계산하면 그 크기는 $a = \frac{\gamma_d}{\gamma_u^2}$ 이다. 한편, 정지 관성계에서 보는 Qa 가 생성하는 전기장 E_p 에 의한 Qb 의 운동을 살펴보면, Qb 의 전하량은 1이고, Qb 의 관성 질량은 γ_u , 전기장은 Qa 의 속도가 v 이므로 $\vec{E}_p = \gamma_v \vec{E}_v = \gamma \hat{r}$ 이다. 따라서, Qb 에 작용하는 가속도는 $\frac{\gamma}{\gamma_u}$ 이 된다. 여기서 구하고자 하는 것은 총 힘에서 쿨롱 힘을 뺀 성분이며, $\vec{F} = q\vec{E}_p \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$ 에서의 $q\frac{v^2}{c^2} \vec{E}_p$ 에 해당하는 항이며, 이 항에 의한 가속도는 Qb 가 겪는 전체 가속도 $\frac{\gamma_d}{\gamma_u}$ 에서 쿨롱 힘에 의한 가속도 $\frac{\gamma}{\gamma_u}$ 를 뺀 $\frac{\gamma_d}{\gamma_u} - \frac{\gamma}{\gamma_u}$ 이다. 여기에 정지 관성계에서의 관성 질량을 곱하여 힘을 구하고, 이를 정지 관성계에서의 전기장의 크기로 나누어준 $\left(\frac{\gamma_d}{\gamma_u} - \frac{\gamma}{\gamma_u} \right) \frac{\gamma_u}{\gamma} = \frac{\gamma_d}{\gamma \gamma_u} - 1$ 이 바로 구하고자 하는 유도된 장에 의한 힘의 성분이다. 이를 계산 하면,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma d}{\gamma \gamma_u} - 1 &= \frac{\gamma d}{\gamma \gamma d \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)} - 1 \\
&= \frac{1}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)} - 1 \\
&= \frac{1 - \gamma^2 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)} \\
&= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}} \\
&= \frac{-\frac{v^2}{c^2} - \frac{v d}{c^2}}{1 + \frac{v d}{c^2}} \\
&= \frac{-v(v+d)}{c^2 \left(1 + \frac{v d}{c^2}\right)}
\end{aligned}$$

을 얻을 수 있다.

지금은 이 해석은 잠시 미루고 다음의 경우를 먼저 분석한 다음 두 결과를 함께 해석할 것이다.

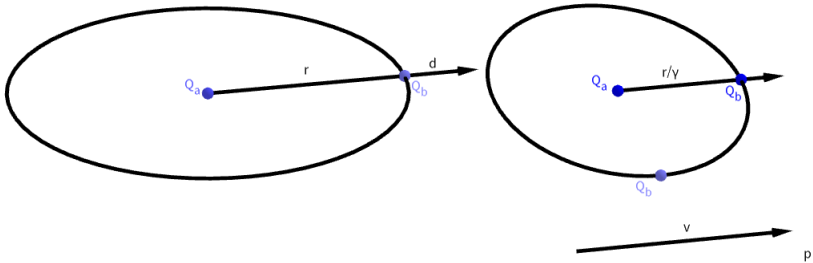


Figure 85: 일직선 상의 운동

Qa 와 Qb 가 진행 방향으로 일직선 상에 존재하면서 v 와 동일한 방향의 상대 속도 d 를 가지고 운동하는 경우이다. Qb 가 움직이는 속도인 v 관성계에서 둘 사이의 거리는 $r=1$ 인 경우이다. 이 때의 각 물리량을 정지 좌표계에서 측정하면 다음과 같다.

먼저 이 경우에도 v 와 d, u 의 방향은 같으므로 역시, $\vec{v} \cdot \vec{d} = vd$ 이고, $\vec{u} = \frac{v+d}{1+\frac{vd}{c^2}} \hat{v}$ 이다. 그러나, 가속도는 움직이는 방향과 동일하므로 $\vec{a}' \cdot \hat{u} = a'$ 이다. 따라서, $\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\vec{a}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{a}' \cdot \hat{u}) \hat{u} \right) \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{a}'}{\gamma^3}$ 인 경

우이다. u 관성계의 관점에서 Qa 와 Qb 간의 거리는 $1/\gamma$ 로 줄어든 것으로 측정 되나 $\theta=0$ 이므로, 따라서 Qb가 u 관성계에서 느끼는 전기장은 $\vec{E}_d = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{r}{\gamma}\right)^2} \frac{1-\beta^2}{1} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \vec{E}_v = 1\hat{r}$ 이고, 가속도는 $a' = 1$ 이다.

이에 따라 정지 관성계에서 보는 전체 가속도는 $a = \frac{a'}{\gamma_u^3} = \frac{1}{\gamma_u^3}$ 이다. 한편 정지 관성계에서 보는 Qb 위치에 대한 Qa 에 의한 전기장의 크기는 v 에 따른 γ 와 그에 따른 거리 축소에 의해 u 관성계에서와 마찬가지로 변함없이 $\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{r}{\gamma}\right)^2} \frac{1-\beta^2}{1} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \vec{E}_v = 1\hat{r}$ 이다. 따라서 전기장 만에 의한 가속도는 관성 질량만 고려하면 되므로, $\frac{1}{\gamma_u}$ 이며, 앞서 구한 전체 가속도에서 전기장 만에 의한 가속도를 빼어주고 여기에 관성 질량을 곱해준 값이 유도된 장에 의한 가속에 해당하는 힘이며 이는

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma_u^3} - \frac{1}{\gamma_u}\right) \gamma_u &= \frac{1}{\gamma_u^2} - 1 \\ &= 1 - \frac{u^2}{c^2} - 1 \\ &= \frac{-1}{c^2} \frac{(v+d)^2}{\left(1 + \frac{vd}{c^2}\right)^2} \end{aligned}$$

이다.

이 결과들을 앞서 살펴본 평행하게 운동하는 전하 사이의 힘의 경우에서의 결과

$$-\vec{E}_p \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{v}}{c^2} \right) = \vec{v} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}_p)$$

과 비교하여 분석해 보면 각각,

$$\frac{-v(v+d)}{c^2 \left(1 + \frac{vd}{c^2}\right)} = \frac{-vu}{c^2} \rightarrow \vec{u} \times \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_p \right) = \vec{u} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) = \vec{u} \times \vec{B}$$

와

$$\frac{-1}{c^2} \frac{(v+d)^2}{\left(1 + \frac{vd}{c^2}\right)^2} = -\frac{u^2}{c^2} \rightarrow \frac{-\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}_p)$$

로 대응 된다고 추측 할 수 있다. 미리 생각해 본 것보다 좀 더 단도직입적인 표현을 볼 수 있다.

그리고, 이 $\frac{-\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}_p)$ 라는 항은 실은 다른 방식으로 이미 발견된 수식이다. 그리피스(Griffiths)의 전자기학 책의 연습문제에서 위 수식이 등장 하고있다.

물론 그 출발점이 된 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ 라는 힘의 정의는 그리피스 이전 상당히 일찌기 등장 한 것을 볼 수 있다. 그러나,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= m\vec{v} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{-2\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \gamma^3 m \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2} \vec{v} + \gamma m \vec{a} \end{aligned}$$

라는 간단한 유도를 최초로 한 사람은 나는 알지 못하며, 현재로서는 그리피스 본인으로 보아야 할 것이다.

이 식의 의미는 가뻡지 않다. 바로,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \neq m\vec{a}$$

가 상대론의 꺾론임을 보여주고 있기 때문이다. 이는 차후에 다시한번 고찰해 볼 것이다. 그리고, 이 식에 로렌츠 힘의 정의를 적용하면,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma^3 m \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2} \vec{v} + \gamma m \vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{q}{\gamma m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \gamma^2 \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2} \vec{v} \dots (1) \\ \vec{a} \cdot \vec{v} &= \frac{q}{\gamma m} \vec{E} \cdot \vec{v} - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \vec{a} \cdot \vec{v} \\ \vec{a} \cdot \vec{v} &= \frac{q(\vec{E}\cdot\vec{v})}{\gamma m (1+\gamma^2 \frac{v^2}{c^2})} = \frac{q(\vec{E}\cdot\vec{v})}{\gamma^3 m} \end{aligned}$$

마지막 결과를 (1)에 다시 적용하면,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{q}{\gamma m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \gamma^2 \frac{q(\vec{E}\cdot\vec{v})}{\gamma^3 m} \frac{\vec{v}}{c^2} \\ &= \frac{q}{\gamma m} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{c^2} \vec{v} \right) \end{aligned}$$

$\frac{-\vec{v}}{c^2} (\vec{a} \cdot \vec{E})$ 이 다시 등장하는 것을 볼 수 있다. 뉴턴 역학의 $\vec{F} = m\vec{a}$ 라는 정의에 따르면 마치 새로운 힘과도 같은 항이 생긴 것을 볼 수 있다. 따라서, 지금까지의 결과로 볼 때, 이 가속도 항이 전자기력의 상대론 적인 일관성을 완성 시키는 요소임을 알 수 있다.

이 결과는 가장 분석하기 쉬운 경우를 분석해 본 것으로 실제 이 관계가 임의의 \vec{d} 의 크기와 방향에서도 성립하는 지를 확인해 보아야 한다. 그 결과에서도 이 새로운 $\frac{-\vec{v}}{c^2} (\vec{a} \cdot \vec{E})$ 에 기인한 가속도가 모든 관성계에서 임의의 방향과 크기에 대한 힘에 의한 가속도의 상대론적인 변환에서의 보정을 올바르게 하는 것이 확인 된다면 그 존재는 확인 된다고 보아도 될

것이다.

그러나, 임의의 속도들에 대하여 분석하는 것은 매우 복잡한 계산으로서 기호 계산으로서는 지나치게 어려워서 수치 계산으로 다루기로 하겠다.

6.3 임의 속도 차이에 대한 수치 계산

먼저 기본적인 함수들부터 입력해야 한다. friCAS 에는 벡터 곱 과 스칼라 곱 연산자가 없으므로 이들부터 함수로 정의하여 입력한다. 그동안 이 책의 계산을 따라서 해온 독자라면 friCAS 는 재 시작하여 입력 하기를 바란다. 계산 입력의 번호는 재 입력이 필요할 경우 일정하지 않을 수 있으므로 무시하기를 바란다. 직교 좌표계를 이용하였고 위치 벡터의 원점 $[0,0,0]$ 은 Qa 의 위치이다.

$$(1) - >cX(a, b) == vector[a.2b.3 - a.3b.2, a.3b.1 - a.1b.3, a.1b.2 - a.2b.1]$$

Type : Void

$$(2) - >cX([1, 0, 0], [0, 1, 0]), cX([0, 1, 0], [0, 0, 1]), cX([0, 0, 1], [1, 0, 0])$$

Compiling function cX with type (List(NonNegativeInteger), List(NonNegativeInteger)) -> Vector(Integer)

$$[[0, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0]]$$

Type: Tuple(Vector(Integer))

벡터 곱 $\vec{a} \times \vec{b}$ 에서의 \times 연산자를 담당할 함수로 cX 를 정의하고 간단히 시험 하였다.

$$(3) - >dX(a, b) == a.1b.1 + a.2b.2 + a.3b.3$$

Type : Void

$$(4) - >sq(v) == dX(v, v)$$

Type : Void

$$(5) - >dX([1, 2, 3], [2, 3, 4])$$

Compiling function dX with type (List(PositiveInteger), List(PositiveInteger)) -> PositiveInteger

스칼라 곱 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 에서의 \cdot 연산자를 담당할 함수로 dX 를 정의하였고, $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ 를 간단히 표현할 sq 함수를 정의하고 간단히 시험하였다.

$$(6) - > Gm(v, c) == \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{dX(v,v)}{c^2}}}$$

Type : Void

$$(7) - > Gm([x, y, z], c)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{-z^2 - y^2 - x^2 + c^2}{c^2}}}$$

Type: Expression(Integer)

$\gamma_{v,c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 를 계산할 함수를 입력하고 시험하였다.

$$(9) - > E(p, v, c) == \frac{1 - \frac{sq(v)}{c^2}}{(sq(p) - \frac{sq(cX(v,p))}{c^2})^{3/2}} p$$

Type : Void

$$(10) - > E(vector[1, 1, 1], vector[0.3, 0.2, -0.1], 1), E(vector[1.0, 1.0, -1.0], vector[0, 0, 0], 1)$$

Cannot compile map : dX

We will attempt to interpret the code.

Cannot compile map: sq

We will attempt to interpret the code.

Compiling function cX with type (Vector(Float), Vector(PositiveInteger)) -> Vector(Float)

[[0.1896149635_9998254822, 0.1896149635_9998254822, 0.1896149635_9998254822],
[0.1924500897_2987525484, 0.1924500897_2987525484, -0.1924500897_2987525484]]

Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

퍼셀의 공식에 의한 전기장을 계산하는 함수이다. p 는 위치 벡터이며, v 는 속도 벡터, 그리고 c 는 광속이며 스칼라 값이다. 퍼셀의 공식 $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p$ 에 $\frac{\hat{r}_p}{r_p^2} = \frac{\vec{r}_p}{r_p^3} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\vec{p}}{(\vec{p} \cdot \vec{p})^{3/2}}$ 과 $\vec{p} \times \vec{v} = pv \sin \theta \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{(\vec{p} \times \vec{v})^2}{p^2 v^2}$ 을 적용하여 상수를 제외하고 직교 좌표 표현

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2} \frac{(\vec{p} \times \vec{v})^2}{p^2 v^2}\right)^{3/2}} \frac{\vec{p}}{(\vec{p} \cdot \vec{p})^{3/2}} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(p^2 - \frac{(\vec{p} \times \vec{v})^2}{c^2}\right)^{3/2}} \vec{p} \\
&\rightarrow \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(p^2 - \frac{(\vec{p} \times \vec{v})^2}{c^2}\right)^{3/2}} \vec{p}
\end{aligned}$$

으로 정리하여 입력하였다.

(11) - >U(v, d, c) ==

if (v = [0, 0, 0]) then d

else $\left(\frac{1}{1 + \frac{dX(d,v)}{c^2}} \left(\frac{1}{Gm(v,c)} d + v + \left(1 - \frac{1}{Gm(v,c)}\right) \frac{dX(d,v)}{sq(v)} v \right) \right)$

Type : Void

(12) - >U(vector[0.1, 0.2, 0.3], vector[0.1, 0.1, 0.1], 1), U(vector[0.0, 0.0, 0.0], vector[0.1, 0.1, 0.1], 1)

Cannotcompilemap : dX

We will attempt to interpret the code.

[[0.1847634420_2423559974, 0.2820399171_0983248484, 0.3793163921_9542936994], [0.1, 0.1, 0.1]]

Type: Tuple(Vector(Float))

상대론적 속도합 공식

$$\vec{u} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)} \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \vec{v} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\vec{d} \cdot \hat{v}) \hat{v} \right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{c^2}\right)} \left(\frac{\vec{d}}{\gamma} + \vec{v} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\vec{d} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right)$$

을 입력하고 시험하였다. 0으로 나누게 되어 오류가 발생하는 v=0 일 경우는 if 문으로 따로 다루게 하였다.

(13) - >rr(d, r, c) ==

if (d = [0, 0, 0]) then r

else $\left(r - \left(1 - \frac{1}{Gm(d,c)}\right) \frac{dX(d,r)}{dX(d,d)} d \right)$

Type : Void

(14) - >rr(vector[0.8, 0, 0], vector[0.8, 4, 4], 1.0), rr(-vector[0.8, 0, 0], -vector[0.8, 4, 4], 1)

Cannotcompilemap : Gm

We will attempt to interpret the code.

[[0.48, 4.0, 4.0], [-0.48, -4.0, -4.0]]

Type: Tuple(Vector(Float))

좌표의 상대론 적인 길이 축소를 다룰 함수 $r^{\hat{r}} - \frac{\gamma-1}{\gamma} (\hat{r} \cdot \hat{d}) \hat{d}$ 이다. 좌표 r 의 성분 중 상대 속도 d 방향의 성분에만 선택적으로 상대론적 길이 축소를 적용하는 공식이다. 앞서 제시하였던 대로 기본적인 좌표는 Qa 를 원점으로 한 v 관성계로 주어질 것이므로 이를 정지 좌표계와 u 좌표계에서의 값으로 변환할 때에는 상대론 적인 길이 축소를 고려하여야 한다. 이를 담당할 함수이다. 실제 사용법은 차후 사용 예와 함께 설명하겠다.

$$(15) \rightarrow A(a, u, c) ==$$

if (u = [0, 0, 0]) then a

else $\left(\frac{1}{Gm(u,c)^2} \left(a + \left(\frac{1}{Gm(u,c)} - 1 \right) \frac{dX(a,u)}{sq(u)} u \right) \right)$

Type : Void

$$(16) \rightarrow rA(a, v, c) ==$$

if (v = [0, 0, 0]) then a

else $\left(Gm(v,c)^2 \left(a + (Gm(v,c) - 1) \frac{dX(a,v)}{sq(v)} v \right) \right)$

Type : Void

$$(17) \rightarrow dA(a, u, d, c) ==$$

if (u = [0, 0, 0]) then a

else $\left(\frac{1}{Gm(u,c)^2 \left(1 + \frac{dX(u,d)}{c^2} \right)^3} \left(\left(1 + \frac{dX(u,d)}{c^2} \right) a + \left(\frac{1}{Gm(u,c)} - 1 \right) \frac{dX(a,u)}{sq(u)} u - \frac{dX(a,u)}{c^2} d \right) \right)$

Type : Void

상대론적인 가속도 변환 공식

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\vec{a}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{a}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right)$$

과

$$\vec{a}' = \gamma^2 ((\gamma - 1)(\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v} + \vec{a})$$

그리고,

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)^3} \left(\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right) \vec{a}' - \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}'}{c^2} \vec{u}' - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right)$$

이다. $u \leftarrow \vec{v}$ 과 $d \leftarrow \vec{u}'$ 를 입력하여 사용한다. 역변환 시에는 동일한 공식에 $u \leftarrow -\vec{v}$ 하고, $d \leftarrow \vec{u} = \vec{v} \oplus \vec{u}'$ 를 입력하면 되므로, 하나의 공식으로 두 경우 다 사용할 수 있다.

그리고, 위그너 회전을 다루어야 하므로 그에 필요한 준비도 해 둘 필요가 있다.

$$(17) \rightarrow \Lambda matrix := \left(\begin{array}{cccc} \gamma & -\beta_x \gamma & -\beta_y \gamma & -\beta_z \gamma \\ -\beta_x \gamma & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y \gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z \gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y \beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \gamma & -\beta_x \gamma & -\beta_y \gamma & -\beta_z \gamma \\ -\beta_x \gamma & \frac{\beta_x^2 \gamma + \beta^2 - \beta_x^2}{\beta^2} & \frac{\beta_x \beta_y \gamma - \beta_x \beta_y}{\beta^2} & \frac{\beta_x \beta_z \gamma - \beta_x \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y \gamma & \frac{\beta_x \beta_y \gamma - \beta_x \beta_y}{\beta^2} & \frac{\beta_y^2 \gamma + \beta^2 - \beta_y^2}{\beta^2} & \frac{\beta_y \beta_z \gamma - \beta_y \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z \gamma & \frac{\beta_x \beta_z \gamma - \beta_x \beta_z}{\beta^2} & \frac{\beta_y \beta_z \gamma - \beta_y \beta_z}{\beta^2} & \frac{\beta_z^2 \gamma + \beta^2 - \beta_z^2}{\beta^2} \end{array} \right)$$

Type: Matrix(Fraction(Polynomial(Integer)))

$$(18) \rightarrow \Lambda M := eval \left(\Lambda matrix, \left[\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2}}, \beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2} \right] \right);$$

Type: SquareMatrix(4, Expression(Integer))

3차원 로렌츠 변환을 소개하면서 구하였던 변환 행렬에 좀 더 구체적인 계산을 위한 표현을 대입하여 로렌츠 변환 행렬 ΛM 을 준비해준다. ΛM 은 표시하기에는 수식 표기량이 너무 많아서 표시를 막았다.

이제부터, 이들을 바탕으로 구체적으로 계산을 해가면서 설명하도록 하겠다.

```
(20) -> digits(20);
c := 1;
r := vector [0.6, 1.0, 0];
d := vector [0, 0, 0.8];
v := vector [0.8, 0, 0];
u := U (v, d, c)
```

```
[0.8, 0.0, 0.48]
```

Type: Vector(Float)

우선 계산 유효 숫자를 적당히 20 정도로 결정한다. 이는 항상 입력할 필요는 없지만 나중에 편리한 점이 있으므로 관행으로서 계속 입력할 것이

다. 광속으로는 1을 가정하여 입력한다. 그리고 v 관성계의 Q_a 기준 Q_b 의 좌표 r 과 그 상대 속도 d 그리고 Q_a 의 속도 v 를 임의의 값으로 입력하고 이를 바탕으로 Q_b 의 속도 u 를 구해본다.

적당한 값이 계산되어 출력되는 것을 볼 수 있다. 여기서 다음 계산을 한번 해본다

```
(20) -> U(u, -d, c)
[0.9320091673_0328495034, 0.0, 0.0916730328_4950343774_4]
Type: Vector(Float)
```

v 에 상대론적 속도 합을 통해 d 를 더하여 구한 값이 u 였는데 u 에 $-d$ 를 더했을 때에는 원래의 v 가 나오지 않는 것을 볼 수 있다. 이런 성질을 수학에서는 비선형이라 부르는 하는데 여기에는 조금 지나치게 넓은 의미 같기도 하다. 그리고 항상 그런 것은 아니다.

```
(22) -> digits(20);
c := 1;
r := vector [0.6, 1.0, 0];
d := vector [0.4, 0, -0.4];
v := vector [0.3, 0, -0.3];
u := U(v, d, c)
[0.5645161290_3225806452, 0.0, -0.5645161290_3225806452]
Type: Vector(Float)
```

```
(23) -> U(u, -d, c)
[0.3, 0.0, -0.3]
Type: Vector(Float)
```

v 와 d 그리고 u 가 같은 방향일 때에는 u 에 $-d$ 를 더하면 원래의 v 가 나오는 것을 볼 수 있다. 이것은 같은 방향이 아닌 두 속도의 상대론적 속도 합인 경우 두 번의 로렌츠 변환에 대응하며 한 번의 로렌츠 변환과 한 번의 위그너 회전 변환으로 표현되는 현상이 관여하고 있기 때문이다.

이를 확인하여 볼 것이다. 앞서 위그너 회전을 구하기 위하여 각각의 속도에 대한 로렌츠 변환 행렬을 구하여 곱한 다음 그 속도 합에 대한 역행렬을 구하여 두 행렬의 곱의 결과에 곱하여 회전 행렬을 남기는 방법을 사용한 적이 있다. 그것을 다시 한번 사용할 것이다. 행렬 곱의 순서와 회전

행렬의 적용 순서에 대해서는 계산 도중에 계속 설명 하겠지만, 사실 내가 실제로 찾아내는 과정에서는 가능한 순서의 조합들을 전부 시험해 보았고, 그 중 올바르게 작동하는 조합을 찾아내는 방식이 원래 찾은 방법이었음은 언급해 둔다.

먼저 다시 같은 방향이 아닌 값들을 입력해 둔다.

```
(24) - >digits(20);
      c := 1 ;
      r := vector [0.6, 1.0, 0] ;
      d := vector [0, 0, 0.8] ;
      v := vector [0.8, 0, 0] ;
      u := U (v, d, c)
      [0.8, 0.0, 0.48]
```

Type: Vector(Float)

그리고, v 속도에 대한 로렌츠 변환 행렬 Λ_v 와 d 속도에 대한 로렌츠 변환 행렬 Λ_d , 그리고 상대론적 속도합 u 에 대한 로렌츠 변환 행렬의 역행렬 $i\Lambda_u$ 를 구한다.

```
(24) - >Lv := eval (LM, [beta_x = v.1/c, beta_y = v.2/c, beta_z = v.3/c])
      (
      1.6666666666_666666667 -1.3333333333_333333333 0.0 0.0
      -1.3333333333_333333333 1.6666666666_666666667 0.0 0.0
      0.0 0.0 1.0 0.0
      0.0 0.0 0.0 1.0
      )
```

Type: SquareMatrix(4,Expression(Float))

```
(25) -> Ld := eval (LM, [beta_x = d.1/c, beta_y = d.2/c, beta_z = d.3/c])
      (
      1.6666666666_666666667 0.0 0.0 -1.3333333333_333333333
      0.0 1.0 0.0 0.0
      0.0 0.0 1.0 0.0
      -1.3333333333_333333333 0.0 0.0 1.6666666666_666666667
      )
```

Type: SquareMatrix(4,Expression(Float))

```
(26) -> iLu := eval (LM, [beta_x = -1*u.1/c, beta_y = -1*u.2/c, beta_z = -1*u.3/c])
      (
      2.7777777777_777777778 2.2222222222_222222222 0.0 1.3333333333_333333333
      2.2222222222_222222222 2.3071895424_836601307 0.0 0.7843137254_9019607844
      0.0 0.0 1.0 0.0
      1.3333333333_333333333 0.7843137254_9019607844 0.0 1.4705882352_941176471
      )
```

Type: SquareMatrix(4,Expression(Float))

xz 평면 내에서만 회전하여 알아보기 쉽도록 v 와 d 를 x 와 z 만의 값으로 설정하였다. 이 값들을 이용하여 가능한 곱셈의 순서는 네 가지이다.

$$(27) \rightarrow \Lambda R := i\Lambda u \Lambda v \Lambda d$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.1E - 19 & 0.0 & 0.3E - 19 \\ -0.7E - 20 & 0.8823529411_764705882 & 0.0 & 0.4705882352_941176471 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.1E - 19 & -0.4705882352_941176471 & 0.0 & 0.8823529411_764705882 \end{pmatrix}$$

Type: SquareMatrix(4,Expression(Float))

$$(28) \rightarrow r\Lambda R := \Lambda d \Lambda v i \Lambda u$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.7E - 20 & 0.0 & 0.2E - 19 \\ -0.1E - 19 & 0.8823529411_764705882 & 0.0 & -0.4705882352_941176471 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.3E - 19 & 0.4705882352_941176471 & 0.0 & 0.8823529411_764705882 \end{pmatrix}$$

Type: SquareMatrix(4,Expression(Float))

$$(29) \rightarrow i\Lambda u \Lambda d \Lambda v$$

$$\begin{pmatrix} 1.7901234567_90123457 & -0.0987654320_987654321 & 0.0 & -1.4814814814_81481481 \\ 1.3536673928_83079158 & 0.3013798111_837327524 & 0.0 & -1.6557734204_793028323 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.6100217864_9237472765 & 0.9586056644_8801742918 & 0.0 & 0.6732026143_790849673 \end{pmatrix}$$

Type: SquareMatrix(4,Expression(Float))

$$(30) \rightarrow \Lambda v \Lambda d i \Lambda u$$

$$\begin{pmatrix} 1.7901234567_90123457 & 1.3536673928_830791576 & 0.0 & -0.6100217864_923747276 \\ -0.0987654320_987654321 & 0.3013798111_837327524 & 0.0 & 0.9586056644_880174292 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -1.4814814814_81481481 & -1.6557734204_793028323 & 0.0 & 0.6732026143_790849673 \end{pmatrix}$$

Type: SquareMatrix(4,Expression(Float))

결과를 보면 ΛR 과 $r\Lambda R$ 로 이름 붙인 조합만이 xz 평면 상의 회전을 내포하고 있음을 볼 수 있으며, 이는 두 번의 로렌츠 변환이 한 번의 두 속도의 상대론적 합에 대한 로렌츠 변환과 한 번의 관련된 회전 변환으로 표현될 때 로렌츠 변환→회전 변환 의 순서로 적용됨을 보여준다. 실제로 u 관성계는 v 관성계에 d 속도를 더한 관성계이므로 속도 합 의 순서는 v->d 이고, 이를 벡터와 행렬의 곱으로 나타내면 두 번째 인 $\Lambda d \Lambda v i \Lambda u$ 의 행렬 곱 순서가 v->d 의 순서에서 한번의 로렌츠 변환을 제거한 회전 변환 임을 알 수 있다. 그러나 그 역회전인 $i\Lambda u \Lambda v \Lambda d$ 를 ΛR 로 결정 한 것은 나의 계산에서 실용적으로 더 자주 필요했던 것은 역회전 이었기 때문이다. 이는 다음 계산으로 보여진다.

먼저 로렌츠 변환에서 시간 항을 제외한 공간에 대한 회전 변환들만을 추출하면,

$$(31) - >rM := \begin{pmatrix} \Lambda R(2, 2) & \Lambda R(2, 3) & \Lambda R(2, 4) \\ \Lambda R(3, 2) & \Lambda R(3, 3) & \Lambda R(3, 4) \\ \Lambda R(4, 2) & \Lambda R(4, 3) & \Lambda R(4, 4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.8823529411_764705882 & 0.0 & 0.4705882352_941176471 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.4705882352_941176471 & 0.0 & 0.8823529411_764705882 \end{pmatrix}$$

Type: Matrix(Expression(Float))

$$(32) - >rrM \begin{pmatrix} r\Lambda R(2, 2) & r\Lambda R(2, 3) & r\Lambda R(2, 4) \\ r\Lambda R(3, 2) & r\Lambda R(3, 3) & r\Lambda R(3, 4) \\ r\Lambda R(4, 2) & r\Lambda R(4, 3) & r\Lambda R(4, 4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.8823529411_764705882 & 0.0 & -0.4705882352_941176471 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.4705882352_941176471 & 0.0 & 0.8823529411_764705882 \end{pmatrix}$$

Type: Matrix(Expression(Float))

이다. 이 회전 변환들 중 rM 을 -d 에 적용한 rM(-d) 를 구하여 u 와의 상대론적 속도합을 구하면,

$$(33) - >U(u, rM - d, 1)$$

$$[0.8, 0.0, 0.1882295438_3428896424E - 19]$$

Type: Vector(Expression(Float))

원래의 $v=[0.8,0,0]$ 을 부동소수점 오차와 함께 다시 구하게 된다. 이는 v 로렌츠 변환을 한 v 관성계에 d 로렌츠 변환을 적용한 관성계는 u 로렌츠 변환과 어떤 회전 변환을 적용한 변환이었는데, 그 결과에서 v 관성계로 돌아가기 위해서는 최종 회전 변환의 역변환을 가장 마지막 결과 값에 적용해 주는 것이 필요하다 라고 해석 될 수 있다. 물론 나는 이런 해석보다는 이러저러한 해석의 가능성을 염두에 두고 가능한 모든 방법을 다 시도해 보는 것으로 올바른 답을 내는 조합을 찾아내었으니, 이런 해석의 중요성은 각자의 판단에 맡길 뿐이다. 그런데, 계산 순서 적용에 대한 해석은 결국 어떤 것이 올바른 답을 내는가 가 중요할 뿐이지만 좀 더 중요한 해석은 있다. 그것은 회전이 어떤 경우에 적용되는가 하는 문제이다. 정지 관성계와 v 관성계의 물리량들 사이에는 회전 관계가 없다. 그리고, 이것은 정지 관성계와 u 관성계의 물리량들 사이에도 마찬가지여야 한다. 그렇다면 회전은 v 관성계와 u 관성계 사이의 물리량 변화에만 존재해야 한다. 이것

은 앵두에 두고 있어야 할 것이다. 이제 이 계산들을 통해 위그너 회전을 적용하는 방법에 대하여 대강의 요령을 알게 되었다.

이제 구체적인 전기장 계산을 진행할 차례이다. u 관성계에서는 Q_b 는 정지 상태이므로 가해지는 힘은 움직이는 Q_a 전하에 의한 전기장에 의한 힘 뿐이고 아무런 자기장이나 기타 유도된 힘은 존재하지 않는다. 그리고, 이 u 관성계에서의 가속도를 정지 관성계에서의 가속도로 변환하기로 한다. 이때, 새로이 추가 시킨 힘을 유도 전기력이라 부르기로 한다면, 정지 관성계에서의 그 힘에 의한 가속도와 전기장과 자기장에 기인한 가속도의 합을 구한다. 이 결과가 u 관성계로부터 변환된 가속도와 항상 동일하다면, 새로운 유도전기력의 존재는 증명되고, 동시에 지금까지 해결되지 않았던 상대론 적인 가속도 변환 문제가 해결된다.

그를 위하여 우선 u 관성계에서의 전기장을 구해야 하며, 그러기 위해서는 다음의 계산이 필요하다.

$$(34) - >id := rM - d$$

$$[-0.3764705882_3529411765, 0.0, -0.7058823529_4117647058]$$

Type: Vector(Expression(Float))

우선 앞서 구했던 Q_b 에서 관찰하는 Q_a 의 상대속도 $rM(-d)$ 를 id 변수에 할당한다.

$$(35) - >dr := rr(id, rMr, c)$$

$$[0.5294117647_0588235293, 1.0, -0.2823529411_7647058824]$$

Type: Vector(Expression(Float))

앞서 준비한 상대론 적인 길이 수축을 좌표에 적용해주는 함수이다. Q_b 가 관찰하는 상대 속도는 앞서 구한 대로 id 이고 상대적인 위치는 Q_a 기준 v 관성계에서의 r 에 위그너 회전을 적용하여 입력한다. 이 결과인 dr 은 Q_b 에서 판단하는 Q_a 기준 Q_b 의 위치이다.

(36) $\rightarrow ed := E(dr, id, c)$

Compiling function cX with type (Vector(Expression(Float)), Vector(Expression(Float))) -> Vector(Expression(Float))

[0.5563319154_7094129771, 1.0508491736_673335624, -0.2967103549_1783535879]
Type: Vector(Expression(Float))

이제 위치와 상대 속도를 알고 있으므로 퍼셀의 공식에 입력하면 Qb가 느끼는 전기장을 계산할 수 있다.

이제 정지 관성계에서의 전기장과 자기장을 계산할 차례이다.

(37) $\rightarrow p := rr(v, r, c)$

[0.36, 1.0, 0.0]

Type: Vector(Float)

P는 정지 관성계에서 관찰하는 Qa 원점 기준 Qb의 위치이다. v 관성계의 기준 r에 움직이는 방향으로의 상대론적 축퇴를 적용한다.

(38) $\rightarrow ep := E(p, v, c)$

Compiling function cX with type (Vector(Float), Vector(Float)) -> Vector(Float)

[0.3783057025_2024008245, 1.0508491736_673335624, 0.0]

Type: Vector(Float)

정지 관성계에서 관찰하는 Qb 위치에서의 퍼셀의 공식에 의한 전기장을 구하여 ep에 저장하였다.

(39) $\rightarrow ev := E(r, [0, 0, 0], c)$

Compiling function cX with type (List(NonNegativeInteger), Vector(Float)) -> Vector(Float)

[0.3783057025_2024008245, 0.6305095042_0040013742, 0.0]

Type: Vector(Float)

당장은 사용하지 않지만 차후에 필요한 v 관성계에서의 Qb 의 위치 r 에 대한 전기장은 ev 에 저장하였다.

v 관성계에서는 Qa 가 정지이므로 Qa 에 의한 자기장이 없고, u 관성계에서는 Qb 가 정지이므로 어떠한 자기장의 영향도 받지 않지만, 정지 관성계에서는 자기장도 있고 영향도 받으므로 계산해야만 한다. 자기장 계산은 앞서 파인만 공식을 다룰 때 구한 $\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E}$ 을 이용한다. 전기장은 알고 있으므로 \hat{r} 를 구해야 하는데 여기서는 \hat{r}_τ 를 이용하기로 한다. 이를 위해서는 정지 관성계 기준에서 Qb 에 광속으로 도달하는 전기장의 거리 벡터 \vec{r}_τ 를 알아야 한다. 그 계산을 위해서는 우선 원점으로부터 Qb 에 전기장이 도달하는데 필요한 시간을 먼저 구하는 것으로 출발한다.

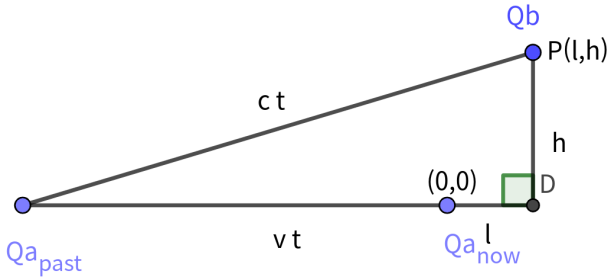


Figure 86: 원점 계산

Qb 의 위치에서 Qa 의 운동 축으로 내린 수직선의 높이를 h 라고 하고, 운동 축과 만나는 점과 원점 즉 Qb 의 현재 위치와의 거리를 l 이라고 한다면, 전기장이 전달된 거리를 ct 라고 할 때 $c^2t^2 = (vt + l)^2 + h^2$ 임을 알 수 있다. 이 이차방정식을 t 에 관해서 풀면,

$$\begin{aligned}
 c^2t^2 &= (vt + l)^2 + h^2 \\
 &= v^2t^2 + 2lvt + l^2 + h^2 \\
 (c^2 - v^2)t^2 - 2lvt - (l^2 + h^2) &= 0 \\
 t &= \frac{2lv \pm \sqrt{4l^2v^2 + 4(c^2 - v^2)(l^2 + h^2)}}{2(c^2 - v^2)} \\
 &= \frac{\gamma^2}{2c^2} \left(2lv \pm 2\sqrt{l^2v^2 + c^2\frac{l^2+h^2}{\gamma^2}} \right) \\
 &= \frac{\gamma^2}{c^2} \left(lv + \sqrt{l^2v^2 + \frac{c^2p^2}{\gamma^2}} \right)
 \end{aligned}$$

을 구할 수 있다. t 는 양수여야 의미 있으므로 + 근만 사용한다. + 근은

항상 양수이다. 이 공식을 입력하면,

$$(40) \rightarrow l := \frac{dX(p,v)}{sq(v)}v$$

[0.36, 0.0, 0.0]

Type: Vector(Float)

l 은 p 위치가 v 운동 축에 내린 수선이 만나는 위치 $\vec{l} = (\vec{p} \cdot \hat{v})\hat{v}$ 이다. h 는 p 위치를 이미 알고 있으므로 따로 구할 필요 없다. 이 l 값을 이용 하여 t 를 구하면,

$$(41) \rightarrow t := \frac{Gm(v,c)^2}{c^2} \left(dX(l,v) + \sqrt{dX(l,v)^2 + c^2 \frac{sq(p)}{Gm(v,c)^2}} \right)$$

2.7436506316_15100157

Type: Float

이다. 다음으로, \vec{r}_τ 는 간단히 $\vec{v}t + \vec{p}$ 로 구할 수 있다. 이것을 o 에 저장한다.

$$(42) \rightarrow o := p + tv$$

[2.5549205052_920801256, 1.0, 0.0]

Type: Vector(Float)

그리고, $\hat{r}_\tau = \frac{\vec{r}_\tau}{\sqrt{\vec{r}_\tau \cdot \vec{r}_\tau}}$ 이므로, 이를 계산하여 ro 에 저장한다.

$$(43) \rightarrow ro := \frac{1}{\sqrt{sq(o)}}o$$

[0.9312120413_0428202934, 0.3644778925_1189452594, 0.0]

Type: Vector(Float)

이제 정지 관성계 기준 Qb 에 작용하는 전기장과 자기장 그리고 유도 전기력 성분을 완전히 계산할 수 있다.

$$(44) \rightarrow \frac{1}{Gm(u,c)} \left(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u) \right)$$

[0.0490284190_4662311468_5, 0.1361900529_0728642968, -0.0522969803_1639798899_8]

Type: Vector(Float)

이는 $\frac{1}{\gamma_u} \left(\vec{E}_p + \vec{u} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}_p) \right)$ 을 계산한 것이다, Qb의 전하량과 모든 관련 상수는 1로 가정하면 이것은 그대로 정지 관성계에서 측정하는 Qb의 가속도이다. 각각 \vec{E}_p 는 전기장에 의한 항, $\vec{u} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right)$ 은 자기장에 의한 항, 그리고, $-\frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}_p)$ 은 새로운 유도항이다.

한편,

(45) $\rightarrow A(ed, u, c)$ Cannot compile map : Gm
 We will attempt to interpret the code.

[0.0490284190_4662311468_3, 0.1361900529_0728642968, -0.0522969803_1639798899_6]
 Type: Vector(Expression(Float))

이 계산에서 ed는 u 관성계에서 Qb에 가해지는 전기장이다. Qb의 정지 질량은 1이므로 이것은 그대로 u 관성계에서의 Qb가 받는 가속도이다. 이 가속도를 $\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\vec{a}' + \frac{1-\gamma}{\gamma} (\vec{a}' \cdot \hat{v}) \hat{v} \right)$ 변환을 함수로 구현한 A 함수를 통하여 정지 관성계에서의 가속도로 변환한다.

(46) $\rightarrow A(ed, u, c) - \frac{1}{Gm(u,c)} \left(ep + \frac{1}{c} cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2} udX(ep, u) \right)$
 $[-0.1E - 20, -0.8E - 21, 0.1E - 20]$
 Type: Vector(Expression(Float))

두 가속도를 뺄셈으로 비교해 보면

$$\frac{1}{\gamma_u^2} \left(\vec{E}_d + \frac{1-\gamma_u}{\gamma_u} (\vec{E}_d \cdot \hat{u}) \hat{u} \right) - \frac{1}{\gamma_u} \left(\vec{E}_p + \vec{u} \times \left(\frac{\hat{r}_\tau}{c} \times \vec{E}_p \right) - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}_p) \right) = 0$$

으로서 정확히 같음을 확인할 수 있다.

다른 임의의 위치와 속도에서 비교해 보기로 한다. 전체 과정을 한번에 실행 할 수 있으며,

(47) - >digits(20);

c := 1 ;

r := vector [0.6, 1.0, - 0.9] ;

d := vector [0.3, - 0.4, 0.5] ;

v := vector [0.2, 0.3, 0.2] ;

u := U (v, d, c) ;

$\Lambda v := eval (\Lambda M, [\beta_x = \frac{v.1}{c}, \beta_y = \frac{v.2}{c}, \beta_z = \frac{v.3}{c}]) ;$

$\Lambda d := eval (\Lambda M, [\beta_x = \frac{d.1}{c}, \beta_y = \frac{d.2}{c}, \beta_z = \frac{d.3}{c}]) ;$

$i \Lambda u := eval (\Lambda M, [\beta_x = -1 \frac{u.1}{c}, \beta_y = -1 \frac{u.2}{c}, \beta_z = -1 \frac{u.3}{c}]) ;$

$\Lambda R := i \Lambda u \Lambda v \Lambda d ;$

$r \Lambda R := \Lambda d \Lambda v i \Lambda u ;$

$rM := \begin{pmatrix} \Lambda R(2, 2) & \Lambda R(2, 3) & \Lambda R(2, 4) \\ \Lambda R(3, 2) & \Lambda R(3, 3) & \Lambda R(3, 4) \\ \Lambda R(4, 2) & \Lambda R(4, 3) & \Lambda R(4, 4) \end{pmatrix} ;$

$rrM := \begin{pmatrix} r \Lambda R(2, 2) & r \Lambda R(2, 3) & r \Lambda R(2, 4) \\ r \Lambda R(3, 2) & r \Lambda R(3, 3) & r \Lambda R(3, 4) \\ r \Lambda R(4, 2) & r \Lambda R(4, 3) & r \Lambda R(4, 4) \end{pmatrix} ;$

id := rM - d ;

dr := rr (id, rM r, c) ;

ed := E (dr, id, c) ;

p := rr (v, r, c) ;

ep := E (p, v, c) ;

ev := E (r, [0, 0, 0], c) ;

$l := \frac{dX(p,v)}{sq(v)} v ;$

$t := \frac{Gm(v,c)^2}{c^2} \left(dX(l, v) + \sqrt{dX(l, v)^2 + c^2 \frac{sq(p)}{Gm(v,c)^2}} \right) ;$

o := p + tv ;

$ro := \frac{1}{\sqrt{sq(o)}} o ;$

$A (ed, u, c) Gm (u, c) - (ep + \frac{1}{c} cX(u, cX(ro, ep))) - \frac{1}{c^2} udX(ep, u)$
 $[-0.8E - 21, 0.8E - 21, 0.2E - 20]$

Type: Vector(Expression(Float))

다른 위치와 방향에서도 두 힘이 완전히 같음을 확인 할 수 있다.

(48) - >digits(200);

c := 1 ;

r := vector [0.6, 1.0, 1.7] ;

d := vector [0.02, 0.4, 0.7] ;

v := vector [0.8, 0.2, 0.1] ;

u := U (v, d, c) ;

$\Lambda v := eval (\Lambda M, [\beta_x = \frac{v.1}{c}, \beta_y = \frac{v.2}{c}, \beta_z = \frac{v.3}{c}]) ;$

$\Lambda d := eval (\Lambda M, [\beta_x = \frac{d.1}{c}, \beta_y = \frac{d.2}{c}, \beta_z = \frac{d.3}{c}]) ;$

$i \Lambda u := eval (\Lambda M, [\beta_x = -1 \frac{u.1}{c}, \beta_y = -1 \frac{u.2}{c}, \beta_z = -1 \frac{u.3}{c}]) ;$

$\Lambda R := i \Lambda u \Lambda v \Lambda d ;$

$r \Lambda R := \Lambda d \Lambda v i \Lambda u ;$

$rM := \begin{pmatrix} \Lambda R(2, 2) & \Lambda R(2, 3) & \Lambda R(2, 4) \\ \Lambda R(3, 2) & \Lambda R(3, 3) & \Lambda R(3, 4) \\ \Lambda R(4, 2) & \Lambda R(4, 3) & \Lambda R(4, 4) \end{pmatrix} ;$

$rrM := \begin{pmatrix} r \Lambda R(2, 2) & r \Lambda R(2, 3) & r \Lambda R(2, 4) \\ r \Lambda R(3, 2) & r \Lambda R(3, 3) & r \Lambda R(3, 4) \\ r \Lambda R(4, 2) & r \Lambda R(4, 3) & r \Lambda R(4, 4) \end{pmatrix} ;$

id := rM - d ;

dr := rr (id, rM r, c) ;

ed := E (dr, id, c) ;

p := rr (v, r, c) ;

ep := E (p, v, c) ;

ev := E (r, [0, 0, 0], c) ;

$l := \frac{dX(p,v)}{sq(v)} v ;$

$t := \frac{Gm(v,c)^2}{c^2} \left(dX(l, v) + \sqrt{dX(l, v)^2 + c^2 \frac{sq(p)}{Gm(v,c)^2}} \right) ;$

o := p + tv ;

$ro := \frac{1}{\sqrt{sq(o)}} o ;$

$A (ed, u, c) Gm (u, c) - (ep + \frac{1}{c} cX(u, cX(ro, ep))) - \frac{1}{c^2} udX(ep, u)$
 $[0.1E - 200, -0.1E - 200, -0.1E - 201]$

Type: Vector(Expression(Float))

다른 값들로 계산 정밀도를 200 자리까지 올려보아도 그 한계까지 정확히 일치하는 것을 확인할 수 있다.

```

(49) - >digits(20);
c := 1 ;
r := vector [- 0.6, 1.0, - 0.7] ;
d := vector [- 0.02, 0.4, - 0.5] ;
v := vector [0.7, - 0.3, 0.1] ;
u := U (v, d, c) ;
Λv := eval (ΛM, [βx =  $\frac{v.1}{c}$ , βy =  $\frac{v.2}{c}$ , βz =  $\frac{v.3}{c}$ ]) ;
Λd := eval (ΛM, [βx =  $\frac{d.1}{c}$ , βy =  $\frac{d.2}{c}$ , βz =  $\frac{d.3}{c}$ ]) ;
i Λu := eval (ΛM, [βx =  $-1\frac{u.1}{c}$ , βy =  $-1\frac{u.2}{c}$ , βz =  $-1\frac{u.3}{c}$ ]) ;
ΛR := iΛuΛvΛd;
r ΛR := ΛdΛviΛu;
rM :=  $\begin{pmatrix} \Lambda R(2, 2) & \Lambda R(2, 3) & \Lambda R(2, 4) \\ \Lambda R(3, 2) & \Lambda R(3, 3) & \Lambda R(3, 4) \\ \Lambda R(4, 2) & \Lambda R(4, 3) & \Lambda R(4, 4) \end{pmatrix}$ ;
rrM :=  $\begin{pmatrix} r\Lambda R(2, 2) & r\Lambda R(2, 3) & r\Lambda R(2, 4) \\ r\Lambda R(3, 2) & r\Lambda R(3, 3) & r\Lambda R(3, 4) \\ r\Lambda R(4, 2) & r\Lambda R(4, 3) & r\Lambda R(4, 4) \end{pmatrix}$ ;
id := rM - d;
dr := rr (id, rM r, c) ;
ed := E (dr, id, c) ;
p := rr (v, r, c) ;
ep := E (p, v, c) ;
ev := E (r, [0, 0, 0], c) ;
l :=  $\frac{dX(p,v)}{sq(v)}v$ ;
t :=  $\frac{Gm(v,c)^2}{c^2} \left( dX(l, v) + \sqrt{dX(l, v)^2 + c^2 \frac{sq(p)}{Gm(v,c)^2}} \right)$ ;
o := p + tv;
ro :=  $\frac{1}{\sqrt{sq(o)}}o$ ;
A (ed, u, c) Gm (u, c) -  $(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep))) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u)$ 
[0.1E - 20, -0.2E - 20, 0.2E - 20]
Type: Vector(Expression(Float))

```

또 다른 값을 한번 더 시험해 보았다.

그리고 u 관성계에서의 가속도를 정지 관성계로 변환하여 비교하였는데 반대 방향으로도 가능하다.

$$(50) - > A(ed, u, c) - \left(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u) \right) \frac{1}{Gm(u, c)},$$

$$ed - rA \left(\left(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u) \right) \frac{1}{Gm(u, c)}, u, c \right)$$

Cannot compile map : Gm

We will attempt to interpret the code.

$$[[0.4E - 21, 0.8E - 21, 0.3E - 20], [0.0, 0.0, 0.5E - 20]]$$

Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

u 관성계와 정지 관성계 간의 변환을 쌍방향으로 비교하여 양방향 다
0 으로 이상 없음을 확인해 보았다.

$$(51) - > rMrA \left(\frac{1}{Gm(d, c)} \left(ev - \frac{1}{c^2}ddX(ev, d) \right), d, c \right) - ed,$$

$$rrMA(ed, id, c) - \frac{1}{Gm(d, c)} \left(ev - \frac{1}{c^2}ddX(ev, d) \right)$$

$$[[-0.5E - 20, -0.7E - 20, -0.5E - 20], [0.6E - 20, 0.7E - 20, 0.8E - 20]]$$

Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

v 관성계와 u 관성계 간의 변환 관계를 비교하여 보았다. v 관성계에
서는 Qa 가 정지 상태로서 자기장이 존재하지 않으므로 유도 가속 항만
입력하였다. 두 관성계 간의 변환에는 위그너 회전이 고려되어야 한다.

$$(52) - > rMrA \left(\frac{1}{Gm(d, c)} \left(ev + \frac{1}{c}cX(v, cX(r, ev)) - \frac{1}{c^2}ddX(ev, d) \right), d, c \right) - ed,$$

$$\frac{1}{c}cX(v, cX(r, ev))$$

$$[[-0.5E - 20, -0.7E - 20, -0.5E - 20], [0.0, 0.0, 0.0]]$$

Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

자기장에 의한 힘의 항 $\frac{1}{c}cX(v, cX(r, ev))$ 은 0 이므로 생략해도 된다.

다음은 v 관성계와 정지 관성계 간의 쌍방 변환으로서 u 관성계를 거치
므로 가장 복잡하다.

(53) - >A (rMrA ($\frac{1}{Gm(d,c)}$ (ev - $\frac{1}{c^2}ddX(ev, d)$), d, c), u, c)
 - (ep + $\frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep))$ - $\frac{1}{c^2}udX(ep, u)$) $\frac{1}{Gm(u,c)}$,
 rrMA (rA ((ep + $\frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep))$ - $\frac{1}{c^2}udX(ep, u)$) $\frac{1}{Gm(u,c)}$, u, c), id, c)
 - $\frac{1}{Gm(d,c)}$ (ev - $\frac{1}{c^2}ddX(ev, d)$)
 [[-0.1E - 20, -0.1E - 20, 0.0], [0.5E - 20, 0.7E - 20, 0.4E - 20]]
 Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

앞서 제시한 보다 일반적인 가속도 변환식

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right)^3} \left(\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right) \vec{a}' - \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}'}{c^2} \vec{u}' - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{a}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right)$$

을 구현한 dA 함수를 이용하면 u 관성계를 통하지 않고 직접 변환 할 수 있다. dA 변환 함수의 역변환은 v 의 부호만 바꾸고 d 에 u' 대신 u 를 입력하면 되므로 따로 정의할 필요가 없다.

(56) - >dA ($\frac{1}{Gm(d,c)}$ (ev - $\frac{1}{c^2}ddX(ev, d)$), v, d, c) - $\frac{1}{Gm(u,c)}$ (ep + $\frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep))$ - $\frac{1}{c^2}udX(ep, u)$)
 Cannot compile map: Gm
 We will attempt to interpret the code.
 [-0.3E - 20, -0.2E - 20, 0.2E - 20]
 Type: Vector(Float)

물론 u 관성계에서의 가속도를 정지 관성계로 변환한 값과 v 관성계에서 관찰한 가속도를 정지관성계로 직접 변환한 값을 비교하여도 마찬가지로 일치한다.

$$(57) \rightarrow A(ed, u, c) - dA\left(\frac{1}{Gm(d,c)}(ev - \frac{1}{c^2}ddX(ev, d)), v, d, c\right)$$

$$[0.3E - 20, 0.2E - 20, 0.2E - 20]$$

Type: Vector(Expression(Float))

가속도 변환 공식 A와 그 역변환 공식 rA, 그리고 보다 일반 적인 가속도 변환 공식 dA 의 관계를 확인해 보면 아래와 같다.

$$(58) \rightarrow A(ed, u, c) - dA(ed, u, vector [0, 0, 0], c),$$

$$rA\left(\frac{1}{Gm(u,c)}(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u)), u, c\right)$$

$$- dA\left(\frac{1}{Gm(u,c)}(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u)), -u, u, c\right)$$

$$[[0.0, 0.0, 0.0], [0.8E - 21, 0.0, -0.2E - 20]]$$

Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

직접 변환 공식 dA 는 v 관성계에서의 가속도를 정지 관성계로 직접 옮겨 비교하는데 사용될 수도 있지만 반대로 정지 관성계에서의 가속도를 v 관성계로 옮겨서 비교하는데 사용될 수도 있다.

$$(60) \rightarrow dA\left(\frac{1}{Gm(d,c)}(ev - \frac{1}{c^2}ddX(ev, d)), v, d, c\right)$$

$$- \frac{1}{Gm(u,c)}(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u)),$$

$$dA\left(\frac{1}{Gm(u,c)}(ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u)), -v, u, c\right)$$

$$- \frac{1}{Gm(d,c)}(ev - \frac{1}{c^2}ddX(ev, d))$$

$$[[-0.3E - 20, -0.2E - 20, 0.2E - 20], [0.3E - 20, 0.0, 0.0]]$$

Type: Tuple(Vector(Float))

세 가지 관성계 각각에서 관찰되는 전자기장에 의하여 전하 Qb 가 받게 되는 가속도는 세 가지 관성계에서의 전자기장과 Qb 의 관성 질량이 모두 다르므로 다르다. 그러나, 그 가속도를 다른 관성계로 상대론적으로 변환 시키면, 즉, 다른 관성계에서 그 가속도를 관찰하면 자신의 관성계에서의 전자기장에 의해 Qb 가 받게되는 가속도와 항상 일치함을 확인 하였다. 이 결과들이 전자기장의 표현이 상대론 적으로 일관성이 있음을 보여주고 있다.

정지 관성계에서 관찰되는 Qb 의 가속도를 $\vec{a}_r = \frac{1}{\gamma_u} \left(\vec{E}_p + \vec{u} \times \vec{B}_p - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}_p) \right)$
 라 하고, v 관성계에서 관찰되는 Qb 의 가속도를 $\vec{a}_v = \frac{1}{\gamma_d} \left(\vec{E}_v - \frac{\vec{d}}{c^2} (\vec{d} \cdot \vec{E}_v) \right)$,
 u 관성계 에서 관찰되는 Qb 의 가속도를 $\vec{a}_u = \vec{E}_d$ 라고 정의 한다. 그리
 고, 가속도 변환 공식 $A(\vec{a}, \vec{u}, c) = \frac{1}{\gamma_u^2} \left(\vec{a} + \frac{1-\gamma_u}{\gamma_u} (\vec{a} \cdot \vec{u}) \vec{u} \right)$ 과 역변환 공
 식 $rA(\vec{a}, \vec{u}, c) = \gamma_u^2 (\vec{a} + (\gamma_u - 1) (\vec{a} \cdot \vec{u}) \vec{u})$, 그리고 가속도 직접 변환 공식
 $dA(\vec{a}, \vec{u}, \vec{d}, c) = \frac{1}{\gamma_u^2 (1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{d}}{c^2})^3} \left(\left(1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{d}}{c^2} \right) \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{d} - \frac{\gamma_u - 1}{\gamma_u} \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{u^2} \vec{u} \right)$ 라고 할 때, 각
 가속도 사이의 관계를 가속도 변환 공식들로 정리 하면 다음과 같다. rM
 과 rrM 은 위그너 회전 행렬과 역회전 행렬이다.

$$(61) \rightarrow ar := \frac{1}{Gm(u,c)} \left(ep + \frac{1}{c} cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2} udX(ep, u) \right),$$

$$av := \frac{1}{Gm(d,c)} \left(ev - \frac{1}{c^2} ddX(ev, d) \right),$$

$$au := ed$$

[[0.1505706189_0053737395, 0.2778490282_0134569344, 0.1873977469_020411621],
 [0.2363192506_84838996, 0.3909135356_617518724, 0.2767389512_1685508766],
 [0.2277506744_1102550144, 0.4056332444_851947955, 0.2772075752_01946528]]

Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

$$(62) \rightarrow A(a_u, u, c) - ar = dA(a_u, u, \text{vector}[0, 0, 0], c) - ar,$$

$$A(rM rA(av, d, c), u, c) - ar = dA(av, v, d, c) - ar,$$

$$rA(ar, u, c) - au = dA(ar, -u, u, c) - au,$$

$$rM rA(av, d, c) - au = rM dA(av, -d, d, c) - au,$$

$$dA(dA(av, v, d, c), -u, u, c) - au,$$

$$rrM A(a_u, -rM d, c) - av = rrM dA(a_u, -rM d, \text{vector}[0, 0, 0], c) - av,$$

$$dA(dA(a_u, u, \text{vector}[0, 0, 0], c), -v, u, c) - av,$$

$$rrM A(rA(ar, u, c), -rM d, c) - av = dA(ar, -v, u, c) - av$$

$$[[0.8E - 21, 0.2E - 20, 0.0] = [0.8E - 21, 0.2E - 20, 0.0], [-0.8E - 21, -0.3E - 20, -0.3E - 20] = [0.8E - 21, -0.2E - 20, -0.8E - 21], [-0.8E - 21, -0.2E - 20, -0.2E - 20] = [0.8E - 21, 0.2E - 20, 0.2E - 20], [-0.2E - 20, -0.7E - 20, -0.5E - 20] = [0.0, -0.3E - 20, -0.3E - 20], [0.4E - 20, -0.2E - 20, 0.0], [-0.3E - 20, 0.8E - 20, 0.0] = [-0.3E - 20, 0.8E - 20, 0.0], [0.8E - 21, 0.5E - 20, 0.0], [-0.4E - 20, 0.8E - 20, -0.2E - 20] = [-0.8E - 21, 0.3E - 20, 0.0]]$$

Type: Tuple(Any)

$$\begin{aligned}
\vec{a}_r &= A(\vec{a}_u, \vec{u}, c) = dA(\vec{a}_u, \vec{u}, 0, c) \\
\vec{a}_r &= A(rMrA(\vec{a}_v, \vec{d}, c), \vec{u}, c) = dA(\vec{a}_v, \vec{v}, \vec{d}, c) \\
\vec{a}_u &= rA(\vec{a}_r, \vec{u}, c) = dA(\vec{a}_r, -\vec{u}, \vec{u}, c) \\
\vec{a}_u &= rMrA(\vec{a}_v, \vec{d}, c) = rMdA(\vec{a}_v, -\vec{d}, \vec{d}, c) \\
&= dA(dA(\vec{a}_v, \vec{v}, \vec{d}, c), -\vec{u}, \vec{u}, c) \\
\vec{a}_v &= rrMA(\vec{a}_u, -rM\vec{d}, c) = rrMdA(\vec{a}_u, -rM\vec{d}, 0, c) \\
&= dA(dA(\vec{a}_u, \vec{u}, 0, c), -\vec{v}, \vec{u}, c) \\
\vec{a}_v &= rrMA(rA(\vec{a}_r, \vec{u}, c), -rM\vec{d}, c) = dA(\vec{a}_r, -\vec{v}, \vec{u}, c)
\end{aligned}$$

그리고, 이 과정들을 통하여 퍼텐셜 이론으로 기술되는 장을 상대론 적으로 일관되게 기술하기 위해서는 해당 장의 자기장에 의한 힘 $\vec{u} \times \left(\frac{\hat{r}}{c} \times \vec{E} \right)$ 과 $-\frac{\vec{u}}{c^2}(\vec{u} \cdot \vec{E})$ 항에 따르는 유도된 가속도 항이 반드시 존재 하여야 함을 증명 하였다.

그리고보니, 깜박한 것이 있다. 전자기장을 계산할 때 Qa 가 등속 직선 운동을 하는 경우만을 다루었고 가속 운동을 할 경우는 다루지 않았었다. 이 부분을 보완하고 넘어 가는 것이 좋을 것이다.

가속 운동을 다루기 위한 전기장 공식은 더 이상 퍼셀의 공식은 쓸수 없고 파인만 공식의 실용적인 꼴,

$$\vec{E} = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^3} \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}'}{c^2}\right) \left(\hat{r} - \frac{\vec{v}}{c}\right) - \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right) \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)$$

을 사용 하여야 한다. 이를 모든 상수항을 제외한채 함수로 준비하여 입력 한다.

$$(63) - > Ea(r, v, a, c) == \frac{1}{sq(r) \left(1 - \frac{dX(v,r)}{c\sqrt{sq(r)}}\right)^3} \left(\left(1 - \frac{sq(v)}{c^2} + \frac{dX(a,r)}{c^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{sq(r)}}r - \frac{1}{c}v\right) - \left(1 - \frac{dX(v,r)}{c\sqrt{sq(r)}}\right) \frac{\sqrt{sq(r)}}{c^2}a \right)$$

Type: Void

그리고, 전기장들을 계산하는 과정을 입력한다.

```

(64)– >digits(20);
c := 2 ;
r := vector [0.6, 1.0, 0.7] ;
d := vector [0.02, 0.1, 0] ;
v := vector [- 0.5, 0.2, - 0.1] ;
u := U (v, d, c) ;
Λv := eval (ΛM, [βx =  $\frac{v.1}{c}$ , βy =  $\frac{v.2}{c}$ , βz =  $\frac{v.3}{c}$ ]) ;
Λd := eval (ΛM, [βx =  $\frac{d.1}{c}$ , βy =  $\frac{d.2}{c}$ , βz =  $\frac{d.3}{c}$ ]) ;
Λu := eval (ΛM, [βx =  $\frac{u.1}{c}$ , βy =  $\frac{u.2}{c}$ , βz =  $\frac{u.3}{c}$ ]) ;
i Λu := eval (ΛM, [βx =  $-1\frac{u.1}{c}$ , βy =  $-1\frac{u.2}{c}$ , βz =  $-1\frac{u.3}{c}$ ]) ;
ΛR := iΛuΛvΛd;
r ΛR := ΛdΛviΛu;
rM :=  $\begin{pmatrix} \Lambda R(2, 2) & \Lambda R(2, 3) & \Lambda R(2, 4) \\ \Lambda R(3, 2) & \Lambda R(3, 3) & \Lambda R(3, 4) \\ \Lambda R(4, 2) & \Lambda R(4, 3) & \Lambda R(4, 4) \end{pmatrix}$ ;
rrM :=  $\begin{pmatrix} r\Lambda R(2, 2) & r\Lambda R(2, 3) & r\Lambda R(2, 4) \\ r\Lambda R(3, 2) & r\Lambda R(3, 3) & r\Lambda R(3, 4) \\ r\Lambda R(4, 2) & r\Lambda R(4, 3) & r\Lambda R(4, 4) \end{pmatrix}$ ;
id := rM - d ;
dr := rr (id, rM r, c) ;
p := rr (v, r, c) ;
l :=  $\frac{dX(p,v)}{sq(v)}v$  ;
t :=  $\frac{Gm(v,c)^2}{c^2} \left( dX(l, v) + \sqrt{dX(l, v)^2 + c^2 \frac{sq(p)}{Gm(v,c)^2}} \right)$  ;
o := p + tv ;
ro :=  $\frac{1}{\sqrt{sq(o)}}o$  ;
aqv := vector [0.2, 0.1, - 2.3].
aqd := A (rM aqv, id, c),
aqp := A (aqv, v, c),
ep := Ea (o, v, aqp, c) ;
ev := Ea (r, vector [0, 0, 0], aqv, c) ;
tmp := Λtranspose([cons(ct, o)]);
ed := Ea ([tmp (2, 1), tmp (3, 1), tmp (4, 1)], id, aqd, c) ;

```

Cannot compile map: sq

We will attempt to interpret the code.

Type: Vector(Expression(Float))

추가된 사항은, 우선 u 관성계로의 로렌츠 변환 행렬

$\Lambda u := eval(\Lambda M, [\beta_x = \frac{u.1}{c}, \beta_y = \frac{u.2}{c}, \beta_z = \frac{u.3}{c}])$ 이다. 그리고,

$aqv := vector[0.2, 0.1, -2.3],$

$aqd := A(rM aqv, id, c),$

$aqp := A(aqv, v, c),$

v 관성계 에서의 Qb의 가속도 aqv 는 분석하려는 순간의 Qa 의 운동에 영향을 미치는 전자기장의 정보가 Qa를 출발하는 순간의 Qa의 가속도이다. aqd 는 이 가속도를 u 관성계에서 보았을 때의 값이다. 위그너 회전이 적용된다. aqp 는 정지 관성계에서 바라본 Qa 의 가속도이다.

$ep := Ea(o, v, aqp, c);$

$ev := Ea(r, vector[0, 0, 0], aqv, c);$

파이만 공식을 이용하여 정지 관성계의 전기장과 v 관성계의 전기장을 계산한다. o 는 Qa 에서 전기장 정보가 출발하여 Qb 에 도달하는 경로 벡터이다. v 관성계에서는 그냥 r 이다.

$tmp := \Lambda u transpose([cons(ct, o)]);$

$ed := Ea([tmp(2, 1), tmp(3, 1), tmp(4, 1)], id, aqd, c);$

o 를 Λu 로 로렌츠 변환하여 공간 성분을 추출하면 u 관성계에서의 거리벡터를 구할 수 있다. u 관성계 에서의 Qa 의 전기장 정보 출발시의 속도는 id 이다.

$$(65) \rightarrow ar := \frac{1}{Gm(u,c)} (ep + \frac{1}{c}cX(u, cX(ro, ep)) - \frac{1}{c^2}udX(ep, u)),$$

$$av := \frac{1}{Gm(d,c)} \left(ev + \frac{1}{c}cX \left(d, cX \left(\frac{1}{\sqrt{sq(r)}}r, ev \right) \right) - \frac{1}{c^2}ddX(ev, d) \right),$$

au := ed

[[0.1061811242_9138400705, 0.2239412002_4608670304, 0.5380086502_1665292439],
[0.1194845433_8388336285, 0.2397685784_157310356, 0.5854368139_6836798568],
[0.1183498170_446227071, 0.2422921291_332650608, 0.5866247876_5702919082]]

Type: Tuple(Vector(Expression(Float)))

ar 은 정지관성계 에서의 전자기장에 의하여 Qb 가 받게되는 가속도 이다. av 는 v 관성계에서의 전자기장에 의하여 Qb 가 받게되는 가속도

이다. Q_a 가 등속 운동할 때와는 달리 Q_a 의 가속운동에 의한 자기장이 존재하므로, 그 영향을 고려하여야 한다. au 는 u 관성계에서 의 전기장에 의하여 Q_b 가 받는 가속도이다. u 관성계에서는 Q_b 가 정지 상태이므로 자기장이나 유도 가속을 고려할 필요가 없다.

$$\begin{aligned}
 (66) \rightarrow & A(au, u, c) - ar = dA(au, u, \text{vector}[0, 0, 0], c) - ar, \\
 & A(rM rA(av, d, c), u, c) - ar = dA(av, v, d, c) - ar, \\
 & rA(ar, u, c) - au = dA(ar, -u, u, c) - au, \\
 & rM rA(av, d, c) - au = rM dA(av, -d, d, c) - au, \\
 & dA(dA(av, v, d, c), -u, u, c) - au, \\
 & rrM A(au, -rM d, c) - av = rrM dA(au, -rM d, \text{vector}[0, 0, 0], c) - av, \\
 & dA(dA(au, u, \text{vector}[0, 0, 0], c), -v, u, c) - av, \\
 & rrM A(rA(ar, u, c), -rM d, c) - av = dA(ar, -v, u, c) - av \\
 & [[-0.3E-20, -0.8E-21, -0.3E-20] = [-0.3E-20, -0.8E-21, -0.3E-20], \\
 & [0.2E-20, 0.5E-20, 0.7E-20] = [-0.4E-21, 0.8E-21, 0.0], [0.3E-20, 0.0, 0.3E-20] \\
 & = [0.6E-20, 0.4E-20, 0.1E-19], [0.6E-20, 0.7E-20, 0.1E-19] = [0.6E-20, 0.7E-20, 0.7E-20], \\
 & [0.6E-20, 0.6E-20, 0.1E-19], [-0.4E-20, -0.4E-20, -0.1E-19] = [-0.4E-20, -0.4E-20, -0.1E-19], \\
 & [-0.4E-20, -0.3E-20, -0.1E-19], [-0.8E-21, -0.4E-20, -0.7E-20] = [-0.4E-21, -0.2E-20, -0.3E-20]]
 \end{aligned}$$

Type: Tuple(Any)

각 관성계에서의 가속도 간의 가능한 변환을 한번에 검사하여 전부 상쇄됨을 확인 하였다.

이로서, Q_a 가 임의의 운동을 하면서 생성하는 전자기장 내에서도 실용적인 꼴의 파인만 공식과 유도 가속도를 이용한 계산을 통해 전자기력이 상대론적으로 일관된 힘임을 확인 하였다. 그러나, 새로운 가속 항이 등장한 이상 확인해 보아야 할 것이 생겼다.