

2.2 로렌츠 변환

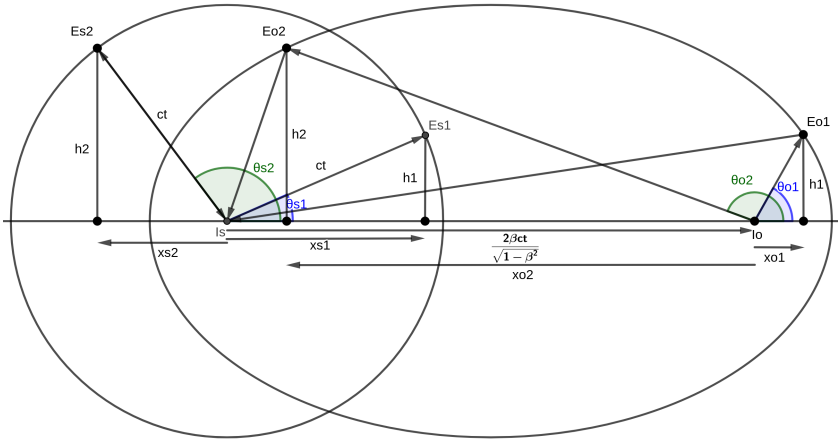


Figure 42: 로렌츠 변환

로렌츠 변환을 위 그림으로 묘사할 수 있다. 구체적으로 설명하자면, 시종일관 Is 를 중심으로 삼는 Is 관성계와 시간 0일 때 중심이 Is 에서 일치했었고 시간 $\frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 가 되었을 때 $\frac{2\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 만큼 떨어진 Io 로 중심이 달라진 상대 속도 $v = \beta c$ 인 관성계 Io 를 묘사하였다. Is 를 중심으로 원형으로 거울들이 배치되어있고, 시간 0일 때 원의 중심 초점 Is 로부터 주위의 거울들에 빛을 비추면 시간 t 라는 동시에 그 빛들이 다시 중심 초점으로 반사되는 사건들을 $Es1, Es2$ 이라고 부르고, 그 빛들이 $2t$ 에 다시 중심으로 모이는 사건을 생각한다. 이 모든 사건을 Io 관성계에서 관찰하면 시간 0에 타원의 한 초점 Io 에서 출발한 빛들이 각기 다른 시간에 타원 위에 존재하는 사건 $Eo1$ 과 $Eo2$ 를 통하여 각각 다시 반사되어 시간 $\frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 에 타원의 다른 초점 Is 에 다시 동시에 모이는 사건으로 관찰될 것이다. 즉 위 로렌츠 변환 그림에서 처럼 Is 관성계에 관찰한 사건들을 Io 관성계에서 관찰한 사건들로 변화 시키는 것이 기하학적으로 묘사한 로렌츠 변환이다.

이를 이용하여 전통적인 로렌츠 변환을 유도해 보면, 극좌표에서 Is 관성계에서의 사건 Eo 들이 위치하는 타원의 방정식은 타원의 방정식 일반꼴

$$R = a \frac{1-e^2}{1-e \cos(\theta)} = \frac{A}{2} \frac{1-\frac{f^2}{A^2}}{1-\frac{f}{A} \cos(\theta)} \quad \text{에서} \quad A = \frac{2ct}{\sqrt{1-\beta^2}}, f = \frac{2\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{이므로}$$

$$R_{\theta o} = \frac{ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1-\beta^2}{1+\beta \cos \theta o}$$

임을 이용하여 계산할 수 있다. 먼저 이 기본 식을 firCAS에 입력해둔다.

$$(5) - > R\theta_o := \frac{ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1-\beta^2}{1+\beta \cos(\theta_o)} \\ \frac{-ct\beta^2+ct}{(\beta \cos(\theta_o)+1)\sqrt{-\beta^2+1}}$$

Type: Expression(Integer)

사건 Eo 들과 Es 들의 Y축 위치 h들은 두 관성계에서 변하지 않음을 이용하여 θ_o 와 θ_s 의 관계를 구하려면 방정식 $R\theta_o \sin(\theta_o) = ct \sin(\theta_s)$ 를 θ_o 에 대하여 풀라는 명령을 CAS에 입력하면 되며 이는 다음과 같다.

$$(6) - > solve(R\theta_o \sin(\theta_o) = ct \sin(\theta_s), \theta_o) \\ [\theta_o = -2atan(\frac{\sqrt{-\beta^2+1}}{(\beta-1) \tan(\frac{\theta_s}{2})}), \theta_o = -2atan(\frac{\tan(\frac{\theta_s}{2})\sqrt{-\beta^2+1}}{\beta-1})]$$

Type: List(Equation(Expression(Integer)))

결과에서 탄젠트 꼴보다 코사인 꼴이 다루기 편하므로 방정식을 변형하여 다시 입력한다.

$$(7) - > solve(R\theta_o \sqrt{1-\cos(\theta_o)^2} = ct \sqrt{1-\cos(\theta_s)^2}, \theta_o) \\ [\theta_o = acos(\frac{-\cos(\theta_s)+\beta}{\beta \cos(\theta_s)-1}), \theta_o = acos(\frac{-\cos(\theta_s)-\beta}{\beta \cos(\theta_s)+1})]$$

Type: List(Equation(Expression(Integer)))

두 가지 해가 계산되지만, 이중 왼쪽 해가 로렌츠 변환 그림의 정의에 부합하므로 이 결과를 선택한다. 오른쪽 해는 좌우가 바뀐 그림이다.

$$\cos(\theta_o) = \frac{\cos(\theta_s) - \beta}{1 - \beta \cos(\theta_s)}$$

관성계 Is에서의 Es들의 시공간좌표 ct와 Xs들의 관성계 Io에서 사건 Eo들의 시공간좌표 R θ_o 와 X θ_o 들의 변환이 각각 시간과 X축에서의 로렌츠 변환이다. R θ_o 가 타원에서 빛이 이동하는 거리이므로 이동하는 관성계에서 Eo들의 ct'이다. 여기에 위 식을 대입하려면, 대입 혹은 치환 명령 eval 혹은 subst를 이용하여, R θ_o 식의 $\cos(\theta_o)$ 부분을 θ_s 를 이용한 $\frac{\cos(\theta_s)-\beta}{1-\beta \cos(\theta_s)}$ 로 바꾸게 한다.

$$(8) - > eval(R\theta_o, \cos(\theta_o) = \frac{\cos(\theta_s)-\beta}{1-\beta \cos(\theta_s)}) \\ \frac{-ct\beta \cos(\theta_s)+ct}{\sqrt{-\beta^2+1}}$$

Type: Expression(Integer)

로렌츠 변환 그림에 따르면 $X_s = ct \cos(\theta_s) \rightarrow \cos(\theta_s) = \frac{X_s}{ct}$ 이며, 이를 위 결과에 대입한다. 입력의 '%' 기호는 직전의 결과를 해당 입력으로 한다는 의미이다.

$$(9) \rightarrow eval(\%, \cos(\theta_s) = \frac{X_s}{ct}) \\ \frac{-X_s\beta + ct}{\sqrt{-\beta^2 + 1}}$$

Type: Expression(Integer)

이것이 시간에 관한 로렌츠 변환이다. 그러나, 아직 CAS 프로그램 들은 그런 식을 보기 좋게 정리하는 방법에 관해서는 아직 미흡하며, $\beta = \frac{v}{c}$ 과 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 를 이용하여, $ct' = \gamma ct - \gamma\beta x_s$ 로 표기하면 좀 더 익숙한 표현이다.

이제 x방향의 로렌츠 변환을 구할 것이다. 로렌츠 변환 그림에서 $X_o = R\theta_o \cos(\theta_o)$ 이므로, 여기에 계산 8에서와 같은 대입을 적용하여 θ_o 표현을 θ_s 표현으로 바꾸면,

$$(10) \rightarrow eval\left(R\theta_o \cos(\theta_o), \cos(\theta_o) = \frac{\cos(\theta_s) - \beta}{1 - \beta \cos(\theta_s)}\right) \\ \frac{ct \cos(\theta_s) - ct\beta}{\sqrt{-\beta^2 + 1}}$$

Type: Expression(Integer)

위 결과에 계산 9와 마찬가지로 $\cos(\theta_s) = \frac{X_s}{ct}$ 를 대입하여 극 좌표 표현을 xy좌표 표현으로 바꾸면,

$$(11) \rightarrow X_o = eval(\%, \cos(\theta_s) = \frac{X_s}{ct}) \\ X_o = \frac{-ct\beta + X_s}{\sqrt{-\beta^2 + 1}}$$

Type: Equation(Expression(Integer))

이것은 $X_o = \gamma X_s - \gamma\beta ct$ 로서 X축에 관한 로렌츠 변환임을 확인할 수 있다.

따라서, 기하학적인 상대성 원리의 표현으로부터 로렌츠 변환을 구할 수 있음을 확인하였다.

이제 이러한 타원을 이용한 계산을 통하여 각 원시 관성계의 중심 점에서 관찰되는 팽창하는 우주를 묘사할 수 있다.

2.3 다른 원시 관성계에서 보는 우주

기하학적으로 원은 중심으로부터의 거리가 일정한 점들의 집합이다. 그러나 이것은 중심과 일정한 거리의 점들이 모두 정지한 경우이다. 실제 우리 우주인 팽창하는 우주에서는 움직이는 점들이 어떤 움직이는 원시 관성계를 중심으로 어떻게 동일한 거리를 구성하는지를 정의하는 방법을 찾아야만 한다. 여기에 대하여 앞서 살펴본, 관점에 따라 원과 타원으로 다르게 보이는 상대성 원리는 거리에 대한 정의를 내리는 다음의 방법을 제시하고 있다.

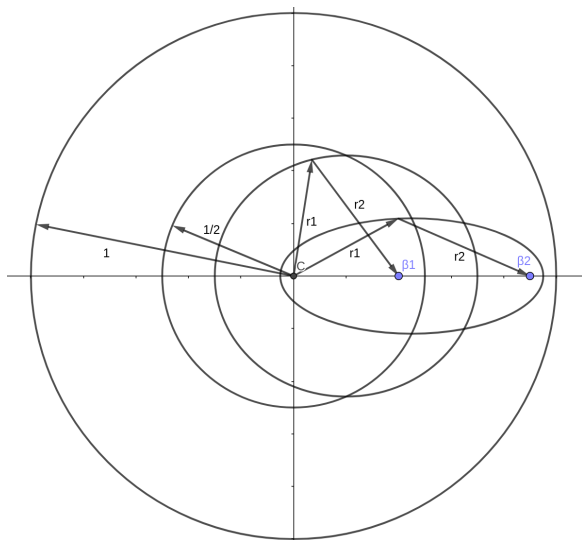


Figure 43: 관측되는 우주

움직이는 동적인 우주에 적당한 새로운 거리의 측정 방법으로서 '레이더 전파 왕복 시간에 의한 거리 측정법'이 가능하다. 한 점에서 두 곳으로 동시에 출발한 레이더 전파가 동시에 되돌아온다면 레이더 장치와 두 곳의 거리는 동일하다 할 수 있다. 이 관계는 정지한 관성계 뿐만 아니라 움직이는 관성계에서도 그대로 사용할 수 있다. 이 한 관성계에서 두 동일한 거리를 왕복한 전파를 측정하는 사건을 상대 속도를 가진 다른 관성계에서 본다면 원래의 초점 기준으로 다른 거리에 떨어진 곳으로 가서 반사된 다음

전파가 이동하는 동안 역시 이동하여 다른 위치에 도달한 초점으로 돌아간 사건으로 보게 된다. 그러나 이 경우에도 두 전파가 그동안 이동해간 출발 초점으로 동시에 돌아가게 된다는 현상은 변하지 않는다. 이 현상을 다른 관성계에서의 동일한 거리를 정의 하는 데에 사용할 수 있다. 이쪽 관성계에서는 동시도 아니고 같은 거리도 아니지만 저쪽 관성계에서는 동시이고 같은 거리인 사건의 집합을 이 방식으로 정의 할 수 있고 그것은 타원을 이룸을 알 수 있다.

마침 우주의 최외곽은 그 어떤 원시 관성계의 중심에서 바라보는 관찰자로부터도 광속으로 멀어져 가고 있으므로 거기서부터 오는 빛은 레이더 반사의 경우와 완전히 동일하게 생각할 수 있다. 이 방식으로 각기 다른 관성계에서 바라보는 우주의 최외곽 껍질을 묘사해보면 앞의 관측되는 우주 그림과 같다.

우주의 원시 관성계 점 중 하나인 앞으로 관찰 중심으로 부를 C를 중심으로 팽창하는 나이 1, 광속 1, 크기 1인 우주를 생각해보자. 그 우주의 최외곽 껍질은 광속으로 팽창하고 있으며, 시간 1일 때 중심에서 이 껍질을 관찰하는 빛은 시간 $\frac{1}{2}$, 크기 $\frac{1}{2}$ 일 때 원형인 외곽 껍질에서 중심으로 출발한 빛일 것이다. 이때 원시 관성계 C와 상대 속도 β 인 또 다른 원시 관성계에서 관찰하는 우주의 껍질은 관측되는 우주 그림에서 묘사하는 대로 시간 0에 중심을 초점으로 광속으로 팽창하기 시작한 우주 껍질의 빛을 또 다른 초점인 β 에서 관찰하는 것이므로 이때 동시에 β 에 도달하게 되는 빛들이 출발한 우주의 껍질은 타원을 이룬다. 3차원 공간에서는 럭비공 형태의 타원체가 될 것이다. 이때 타원의 각 초점으로부터 거리의 합은 $r_1 + r_2 = 1$ 이다. $\beta = 0$ 이면 두 초점의 거리는 0 즉 원이 되어 $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ 이다. 이러한 우주 껍질 내부의 공간을 묘사하는, 시간 1, 초점 β 인 원시 관성계 β 에서 관찰되는 최외곽보다 가까운 거리인 r 은 다음 거리의 정의 그림을 이용하여 정의할 수 있다.

나이 1인 우주에서 우주의 외곽 껍질보다 안쪽인 1보다 작은 r 을 β 관성계 기준으로 묘사하려 한다면, 시간 $(1-r)$ 일 때 $\beta(1-r)$ 에 위치하였던 β 관성계 점으로부터 출발한 빛이 중간에 반사되어 시간 1에 동시에 다시 β 에 수렴할 때, 그 빛을 수렴하도록 반사 시킨 점들의 집합으로 묘사할 수 있다. 이 점들은 타원을 이루며 이를 묘사하는 타원의 방정식은

$$R_{\theta} = \frac{r}{2} \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos(\theta)}$$

이다. 이를 관측 타원이라고 부르기로 한다.

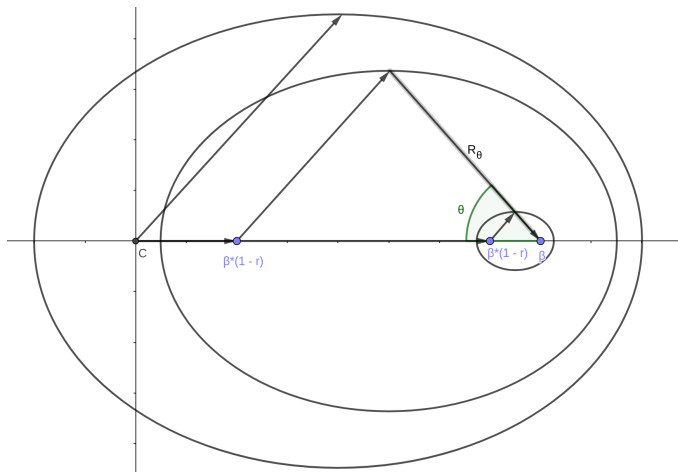


Figure 44: 거리의 정의

이 식에서 r 은 어떤 원시 관성계에서 관찰하는 겉보기 거리이며, 일 반상대론 기반 우주론에서의 'angular diameter distance'에 해당하는 값이나, 여기서는 절대적인 거리가 아닌 우주의 전체 크기에 대한 상대적인 비로서 표기하고 있다.

이를 이용하여 관성계 β 에서 관찰하는 우주를 분석해 볼 것이다. 우선 관성계 β 에서 관찰하는 관측 타원 상에 위치한 우주의 각 점들의 나이를 분석해 보기로 한다. 동일한 관측 타원 상의 모든 위치에서의 스스로 느끼는 우주의 나이는 동일해야만 할 것이다. 과연 그러한지를 확인해 본다.

2.4 우주의 나이 구조

관성계 β 기준으로(R_θ, θ)에 위치한 점 P에서 β 로 빛이 출발했을 때 이를 사건 P라고 부르기로 하면 이때 사건 P는 β 관성계 기준으로는 반경 $\frac{r}{2\gamma}$ 을 그리는 원 상에 존재하게 된다. 또한 이는 관찰 중심 C 관성계를 기준으로는 $\beta(1-r)$ 점과 β 점을 초점으로 하고 장축 직경 r 인 타원 상에 존재하게 된다. 이때 사건 P에서 느끼는 자신의 주위 우주의 나이는 이를 관측하는 관성계와 무관한 스스로 느끼는 고유한 나이이다.

이를 중심 C를 기준으로 표현하려면 사건 P 점에 해당하는 원시 관성

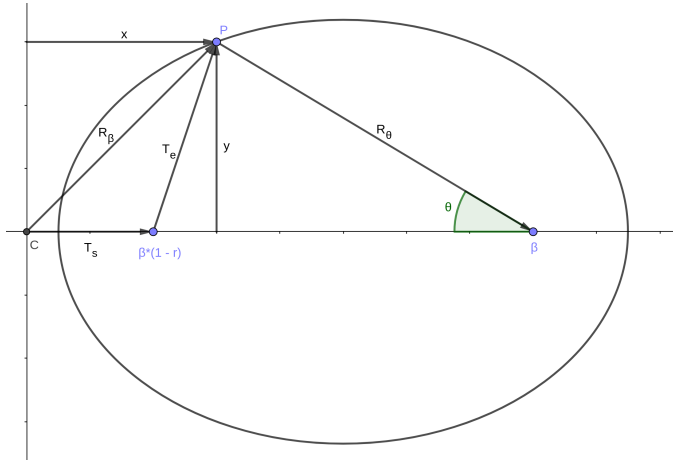


Figure 45: 나이 계산

계와 우주의 관찰 중심 C와의 상대적인 속도 β_p 를 알아야 한다. 광속은 1로 둘 때, 그 상대적인 속도는 사건 P와 관찰 중심 C간의 거리 R_β 를 그 시점에서의 우주의 크기로 나눈 값이며, 이때 우주의 크기는 광속은 1 이므로 사건 P의 시간 $T_s + T_e$ 이다. 이는

$$\beta_p = \frac{R_\beta}{T_s + T_e}$$

이다. 이때, T_s 는 β 관성계가 β 의 속도로 $\beta^*(1-r)$ 거리에 도달했을 때의 시간이니 $\frac{\beta(1-r)}{\beta}$ 이다. 그리고, P가 장축 직경 r 인 타원 상의 점이므로 T_e 는 거리 기준으로 $r = T_e + R_\theta$ 을 만족 시키게 된다. 이때 광속은 1로 가정하였으므로 시간 $T_e = \frac{r-R_\theta}{c} = r - R_\theta$ 이다.

이때 P점은 C점을 기준으로 β_p 의 속도로 멀어지고 있으므로 특수상대론에 의하면 C점 기준으로 시간이 느리게 흐르게 된다. 따라서 P점에서의 우주의 나이는

$$\sqrt{1 - \beta_p^2}(T_s + T_e)$$

이다.

우주 원리에 따르는 우주의 균일성과 등방성이 만족 되려면 임의의 β 에서 관찰되는 천구를 이루는 동일한 r 과 임의의 θ 인 모든 P사건들은 모두 스스로 느끼는 고유한 나이가 같아야 한다.

이것이 성립하는 지를 확인할 것이다. 먼저 나이 계산 그림의 모든 값들의 정의를 관측되는 우주 그림과 나이 계산 그림을 통해 앞서 설명한 대로 정리하여 firCAS 변수들에 할당해둔다. 앞의 설명에서는 P점 위치의 xy 좌표로의 변환은 이야기하지 않았지만 차후 사용할 것이므로 함께 입력해 둘 것이다.

$$\begin{aligned}
 (12) - &> R\theta := \frac{r}{2} \frac{1-\beta^2}{1-\beta \cos(\theta)}, \\
 Ts &:= \frac{\beta(1-r)}{\beta}, \\
 Te &:= r - R\theta, \\
 x &:= \beta - R\theta \cos(\theta), \\
 y &:= R\theta \sqrt{1 - \cos(\theta)^2} \\
 &[\frac{r\beta^2-r}{2\beta \cos(\theta)-2}, -r+1, \frac{2r\beta \cos(\theta)-r\beta^2-r}{2\beta \cos(\theta)-2}, \frac{((-r+2)\beta^2+r) \cos(\theta)-2\beta}{2\beta \cos(\theta)-2}, \frac{(r\beta^2-r)\sqrt{-\cos(\theta)^2+1}}{2\beta \cos(\theta)-2}]
 \end{aligned}$$

Type: Tuple(Any)

이제 우주의 나이 식을 계산할 것이다.

자동으로 풀리기 쉽게 $\sqrt{1 - \beta_p^2}(T_s + T_e)$ 대신 $\sqrt{(1 - \beta_p^2)(T_s + T_e)^2}$ 꼴을 사용하기로 한다. 그리고,
 $R_\beta^2 = x^2 + y^2$ 이므로, $\beta_p^2 = \left(\frac{R_\beta}{T_s+T_e}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{(T_s+T_e)^2}$ 이다. 그러므로, 사용할 P점에서의 우주의 나이식의 최종꼴은

$$\sqrt{\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{(T_s + T_e)^2}\right) (T_s + T_e)^2}$$

이다. 계산 12 에서 식에 필요한 값들은 다 변수에 미리 할당해 두었으므로 해당 식을 입력하기만 하면 자동으로 계산이 수행되며,

$$\begin{aligned}
 (13) - &> \sqrt{\left(1 - \frac{x^2+y^2}{(T_s+T_e)^2}\right) (T_s + T_e)^2} \\
 &\sqrt{(r-1)\beta^2 - r + 1}
 \end{aligned}$$

Type: Expression(Integer)

$\sqrt{1 - \beta^2}\sqrt{1 - r}$ 라는 계산 결과를 얻게 된다. 이는 입력 당시 존재하였던 θ 정보가 사라진 θ 와 무관한 r 과 β 에만 의존한 값이므로 우주는 모든 θ 방향으로 동일하게 보여야 한다는 등방성을 만족한다. 또한 이는 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 속도로 시간이 느리게 흐르고 있는 모든 임의의 원시 관성계 β 에서 느끼는

자기 주위 우주의 나이 이므로, 모든 원시 관성계 β 의 관찰자들은 자신을 중심으로 r 거리 만큼 떨어진 우주 영역의 나이를 자신의 나이가 1이라고 느끼는 기준으로는 $\sqrt{1-r}$ 로 보게 되며, 이는 모든 원시 관성계에서 보는 우주는 동일해야 한다는 우주의 균일성을 만족한다.

$\beta=0$ 일 때에 한정하여 거리 r 과 달아나는 속도 βp 의 관계는 위와는 다른 접근법의 계산으로 직접 구할 수도 있다. 시간 0에 관찰 중심 C를 출발한 βp 와 이를 시간 $(1-r)$ 에 출발하여 따라잡고 반사되어 시간 1에 원점에 돌아오는 빛의 움직임을 살펴보면, 빛이 따라잡고 돌아오는데 주어진 왕복 시간은 r 이며, βp 가 빛에 따라잡히기 전까지 달린 시간은 $(1-r) + \frac{r}{2}$ 이고 빛이 쫓아가는데 걸린 시간은 $\frac{r}{2}$ 이므로 다음과 같이 식을 세울 수 있다.

$$(14) - > solve \left(\frac{r}{2} = \beta p \left(1 - r + \frac{r}{2} \right), \beta p \right) \\ [\beta p = -\frac{r}{r-2}]$$

Type: List(Equation(Fraction(Polynomial(Integer))))

어떤 거리 r 에서의 속도를 구하였으므로 이 결과를 잘 알려진 주파수에 관한 상대론적 적색편이 식 $\sqrt{\frac{1-\beta p}{1+\beta p}}$ 에 대입하면 C에서 관찰하는 r 지점에서의 시간의 흐르는 속도를 얻을 수 있다. 이를 C점에서의 우주의 나이 1일 때 까지 관찰한 것이 C가 관찰한 r 이 느끼는 고유한 나이이며 이는,

$$(15) - > eval \left(\sqrt{\frac{1-\beta p}{1+\beta p}}, \% \right) \\ \sqrt{-r+1}$$

Type: Expression(Integer)

이다. 이로써 서로 다른 방법으로 구한 고유한 나이가 β 가 0인 관찰자 C의 경우 동일함을 확인할 수 있다. 즉 두 방법은 모순이 아니고, 계산 13으로 얻은 결과가 정당함을 확인하였다.

관찰 되는 우주 영역의 고유한 나이라는 특성에 대해서만 우주가 균일하고 등방해서는 부족하고, 팽창하고 있기에 점점 멀어져 가는 우주의 밀도에 대해서도 우주는 균일하고 등방하게 관찰되어야만 한다. 이제 모든 관성계에서 관찰되는 우주의 고유 나이를 알고 있으므로 이를 토대로 우주의 밀도 분포를 계산해 볼 수 있다.

2.5 우주의 물질 밀도 분포

우선 추측을 먼저 해보면, 고전역학적으로는 팽창하는 우주의 중심 주변에서의 입자 밀도는 우주의 반경이 시간에 비례하여 늘어나고, 반경의 3승에 비례하여 커지는 우주의 체적에 반 비례하므로, 시간의 3승에 반 비례하여 줄어듦을 유추할 수 있다. 우주의 균일성 가정에 따르면 이는 모든 원시 관성계에서 동일하게 적용 되어야 하며, 다만 각 원시 관성계에서 느끼는 우주의 나이가 다르므로 각 원시 관성계 점에서의 밀도는 관찰 중심 C의 밀도가 1일 때 시간의 3승의 역수 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}^3}$ 가 될 것이다. 이때 모든 원시 관성계들은 β 의 속도로 관찰 중심 C로부터 멀어지고 있으므로 C에서 관찰하는 다른 원시 관성계 중심점들에서의 물질 밀도는 특수상대론의 길이 수축을 고려하여 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 만큼 더 커져야 하므로 최종적으로 $\frac{1}{(1-\beta^2)^2}$ 이 되어야 함은 기본적으로 예측할 수 있다. 길이 수축에 대한 고려는 연이어 달리는 두 입자 간의 거리를 정지한 관찰자가 볼때 L 이라면 이를 두 입자 시점에서 측정한 거리는 $\frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 인 점으로부터도 유추할 수 있다.

이 예측은 다음과 같은 방식으로 조금 더 엄밀하게 계산하여 확인해 볼 수 도있다.

이 방식을 설명하기 위해서는 우선 내가 정규화 된 우주라고 부르는 개념이 필요하다. 관찰 중심 C에 위치한 관찰자로서 주위의 물질 밀도를 살펴보면 팽창하는 우주의 경우 그 밀도가 시간에 따라 감소함을 보게 될 것인데, 여기서 밀도란 중심으로부터 일정 거리 내에 존재하는 입자의 수라고 정의할 수 있을 것이다. 그런데 중심으로부터 일정 거리의 개념은 절대적인 거리일 수도 있지만 상대적인 거리일 수도 있다. 등속 팽창하는 우주의 경우 우주의 반경 r 은 시간에 따라 일정하게 증가하게 될 것이다. 이때, 그 r 의 $1/n$ 거리를 정하고 그보다 가까운 입자의 수를 세어본다면 그 거리 내의 입자의 수는 시간에 따라 변하지 않고 항상 일정할 것이다. 여기서, 그 r 을 항상 1이라고 가정한 우주를 정규화 된 우주라고 부를 것이다. 이때 우주 원리 중 균일성의 가설에 따르면 어떤 원시 관성계에 대해서도 그 관성계 기준의 정규화 된 우주에서는 어떤 동일한 미세 반경 dr 내에 존재하는 입자 수는 동일해야 한다. 이것을 어떤 다른 원시 관성계에서 관찰한다면 자신으로부터 천천히 멀어지는 가까운 원시 관성계는 자신과 비슷한 물질 밀도를 보이고 자신과 멀리 떨어진 빠르게 멀어지는 원시 관성계는 오래전의 모습이고 또한 특수상대론의 시간 지연도 적용되어 보다 물질 밀도가 높게 보일 것이다. 그 현상에 따르는 입자 밀도 분포를 구하는 계산이다.

앞서 우주의 나이 구조 설명에서 어떤 원시 관성계 β 기준으로 거리 r 의 천구를 이루는 점들은 중심 C 기준으로는 타원체를 이룬을 보였었다. β 원시 관성계의 천구를 이루는 점들은 관찰 중심 C 에서 보기에는 동시가 아닌 각기 다른 시간에 β 점으로 빛을 보내는 사건들의 집합이고 이는 타원체를 이룬다. 이를 사건의 타원체라고 일단 부르기로 하자. 이때 각 사건들 당시의 우주의 전체 크기 또한 각기 다르다. 그 사건들을 전부 정규화 된 우주로 투영하면 이번에는 그 타원체의 장축 반경이 오히려 줄어든 원반 형태로 찌그러지게 된다. 이때 그 압축된 비율은 타원체의 부위 별로 일정하지는 않지만, 그 천구의 반경이 미세한 dr 이라면, 그 원반의 압축 비율이 일정하다 볼 수 있다. 이때 정규화 된 우주에서 이 미세 구의 내부에는 항상 동일한 수의 입자가 있으므로, 중심 C 에서 관측되는 입자 분포는 이 미세 구의 축소되는 비율에 정확히 비례하게 된다. 그러한 β 관성계에서의 미세 구를 관찰자 중심 C 기준 정규화 된 우주의 미세한 찌그러진 구로 투영하는 작업을 해 볼 것이다.

먼저 β 관성계의 미세 구를 C 관찰 중심에서의 사건의 타원체로 바꾼다. 나이 계산 그림에 따르면 θ 가 $0, \pi$ 일 때가 x 축 방향으로서 β 관성계의 운동 방향이며 $\cos \theta = \beta$ 일 때 타원의 y 축 높이가 최대가 되는 타원의 단축 반경 높이인 위치가 된다. 이를 각각 X 축 방향 반경과 Y 축 방향 반경이라 부르기로 한다. 이들의 정규화 된 우주로의 투영을 구할 때, 변형되는 문제에 대해서는, 앞서 말한 대로 미세 영역에서의 변형이므로 그 찌그러짐의 비율은 모든 부위에 대하여 일정하다고 볼 수 있으므로, 이 타원체의 정규화 된 우주로의 투사는 그 사건이 일어난 위치를 그 사건이 일어난 시간으로 나누어 주는 것으로 충분하다. 투사 후 압축된 원반형의 치수 추출은 x 축 방향은 x 축 상의 정규화 된 값 중 큰 값으로부터 작은 값을 빼주면 되고, y 축 방향과 z 축 방향으로서는 동일하고 대칭이므로 원반의 반경을 2배 해주기만 하면 된다. 이 계산에 필요한 타원의 x 값과 y 값은 앞서 계산 12 에서 이미 입력하여 두었으므로, 여기에 해당 θ 값 만을 대입해주면 된다. 이는 원래의 미세 구 dr 과의 비로 표현되며 아래 계산과 같다. 마침 limit 대신 eval 을 쓸 수 있는 꼴이므로,

$$(16) - > \text{eval} \left(D \left(\text{eval} \left(\frac{x}{Ts+Te}, \theta = 0 \right) - \text{eval} \left(\frac{x}{Ts+Te}, \theta = \pi \right), r \right), r = 0 \right), \\ \text{eval} \left(D \left(2 \text{eval} \left(\frac{y}{Ts+Te}, \theta = \arccos(\beta) \right), r \right), r = 0 \right) \\ [\beta^2 - 1, \sqrt{-\beta^2 + 1}]$$

Type: Tuple(Expression(Integer))

그 결과는 y와 z축 두 방향으로 각각 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 만큼 x축 방향으로 $1 - \beta^2$ 만큼 축퇴된 구이고 그 부피내에 관찰중심 C에서와 동일한 수의 입자가 존재하므로 관찰중심 C와의 밀도의 비는 앞서와 마찬가지로

$$\frac{1}{(1 - \beta^2)^2}$$

이 됨을 확인할 수 있다. 이제 타당한 우주의 밀도 분포를 알았으므로 이 밀도 분포가 관찰 중심 C에서 뿐만 아니라 모든 원시 관성계 중심 β 에서도 실제로 동일하게 관측되어 우주의 균일성과 등방성을 만족 시키는 지를 확인할 차례이다.

2.6 우주의 균일성과 등방성 확인

우주의 균일성과 등방성을 확인하기 위해 실제로 살펴보아야 할 것은, 각 원시 관성계 중심 β 에서 거리 r만큼 떨어진 천구에서 관측되는 우주의 입자 밀도 함수가 모든 원시 관성계에서 그 꼴이 일정한지 여부, 그리고 방향에 대한 성분을 포함하지 않는 등방한 형태인가 여부이다. 이를 구체적으로 표현하면 관성계 중심점 β 에서 거리 ro인 β 의 천구 표면에서 dro 만큼의 미소 두께와 $d\theta_0$ 와 $d\phi_0$ 만큼의 미소 폭을 지닌 미소 영역 내의 입자의 수가 방향 각도 θ_0 와 ϕ_0 에 무관한 거리 ro 만의 함수 인가를 확인하는 일이다.

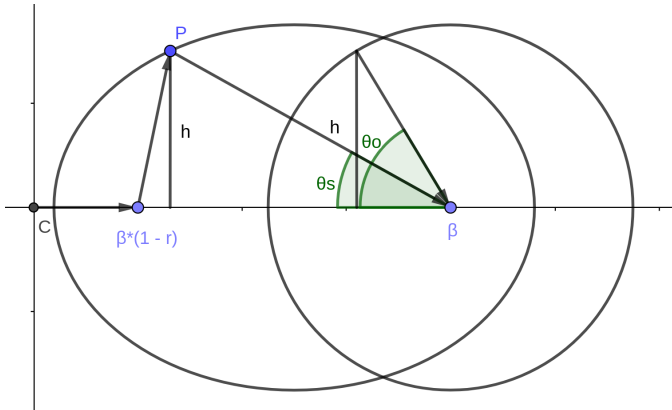


Figure 46: 상대적인 천구

먼저 관측 타원을 정의해야 한다. 사용되는 각도 θ_s 는 중심 C 관성계

기준의 각도이므로 β 관성계에서의 각도 θ_0 로 변환하는 과정이 필요하다. 관찰 중심 에서 $R_\theta = \frac{r}{2} \frac{1-\beta^2}{1-\beta \cos(\theta)}$ 로 정의했었던 관측 타원은 β 관성계에서는 반경 $\frac{r}{2} \sqrt{1-\beta^2}$ 인 원으로 관측되며, 앞서 로렌츠 변환 유도에서 비슷한 작업을 한대로 사건의 y축 높이 h는 타원일 때나 원일 때 관계없이 동일한 점을 이용하여 관측 타원에서의 θ_s (실제 계산에서는 θ 로 표기되고 있다.)를 β 관성계에서의 θ_0 에 의한 표현으로 변환한다. 이는 광행차를 보정하는 계산과 흡사하다.

$$(17) \rightarrow \text{solve} \left(R_\theta \sqrt{1 - \cos(\theta)^2} = \frac{r}{2} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \cos(\theta_0)^2}, \theta \right)$$

$$[\theta = \text{acos}(\frac{\cos(\theta_0)+\beta}{\beta \cos(\theta_0)+1}), \theta = \text{acos}(\frac{\cos(\theta_0)-\beta}{\beta \cos(\theta_0)-1})]$$

Type: List(Equation(Expression(Integer)))

왼쪽 식이 상대적인 천구 그림의 정의와 부합하나, $\theta=0$ 일 때 r은 -X 방향을 향하므로 이후 계산하게 될 행렬식의 값이 크기는 옳으나 부호가 음으로 나오게 되므로 최종적으로 -1을 곱해야 하는 대신 값은 같고 부호가 반대로 나오게 되는 오른쪽 식을 이용하여 우주의 나이 구조에서의 계산 12의 $T_s + T_e, x, y$ 등을 θ_0 를 이용한 형태로 바꾸어 입력할 것이다.

$$(18) \rightarrow eq := \theta = \text{acos} \left(\frac{\beta - \cos(\theta_0)}{1 - \beta \cos(\theta_0)} \right),$$

$$To := Ts + \text{eval}(Te, eq),$$

$$xo := \text{eval}(x, eq),$$

$$\text{eval}(y, eq) = \frac{r}{2} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \cos(\theta_0)^2},$$

$$yo := \frac{r}{2} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \cos(\theta_0)^2}$$

$$[\theta = \text{acos}(\frac{\cos(\theta_0)-\beta}{\beta \cos(\theta_0)-1}), \frac{r\beta \cos(\theta_0)-r+2}{2}, \frac{r \cos(\theta_0)+(-r+2)\beta}{2},$$

$$\frac{(-r\beta \cos(\theta_0)+r) \sqrt{\frac{(\beta^2-1) \cos(\theta_0)^2 - \beta^2 + 1}{\beta^2 \cos(\theta_0)^2 - 2\beta \cos(\theta_0) + 1}}}{2} = \frac{r \sqrt{-\beta^2+1} \sqrt{-\cos(\theta_0)^2+1}}{2}, \frac{r \sqrt{-\beta^2+1} \sqrt{-\cos(\theta_0)^2+1}}{2}]$$

Type: Tuple(Any)

밀도를 구하므로 체적소를 정의해야 한다. 극 좌표 표기에서는 보통 θ_0 를 위도로 사용하지만 여기서는 한번만 적도 부근에서 0 값으로만 쓰고 말 ϕ_0 에 위도를 부여한다. ϕ_0 와 ϕ 는 동일하다. 적도 부근이므로 $\cos(\phi_0)=1$ 이 되어 계산이 편해진다. β 관성계에서 $dr \times r \times \cos(\phi) \times d\theta \times r \times d\phi \rightarrow r^2 dr d\theta d\phi_0$ 꼴 인 미소 체적을 C 관성계 기준으로 구하기 위해 상대적인 천구 그림의 점 P부근을 확대하여 보자. 점 P는 β 로 부터 P까지의 $\vec{R}(r, \theta)$ 로 표시해본다.

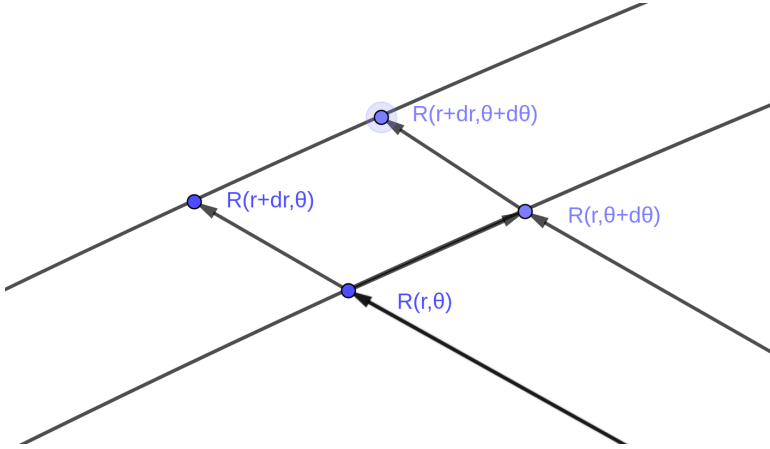


Figure 47: P점 확대

원이 아닌 타원 상의 미소 영역이므로 서로 직교하는 dr 이나 $rd\theta$, $rd\phi$ 같은 간편한 정의는 볼 수 없지만, 대신 평행사변형으로부터 $\vec{R}(r+dr, \theta) - \vec{R}(r, \theta) = \frac{d\vec{R}(r, \theta)}{dr} dr$ 과 $\vec{R}(r, \theta+d\theta) - \vec{R}(r, \theta) = \frac{d\vec{R}(r, \theta)}{d\theta} d\theta$ 같은 정의를 사용할 수 있다.

$Rd\phi$ 는 xy 평면에 수직인 z 방향이므로 원에서의 $rd\phi$ 의 정의를 그대로 사용할 수 있다. β 관찰자가 보는 우주의 밀도를 계산하는데 필요한 미소 체적 $dr \times rd\theta \times rd\phi$ 중 $dr \times rd\theta$ 에 해당하는 면적은 $\frac{d\vec{R}(r, \theta)}{dr} dr \times \frac{d\vec{R}(r, \theta)}{d\theta} d\theta$ 인데 알고자 하는 것은 절대적인 밀도가 아닌 관성계 중심 β 점의 밀도 대비 P 점의 밀도의 비 이므로 필요한 것은 실제의 미소 부피가 아닌 r 과 θ 에 따른 미소 부피들의 비이다. 따라서, $\frac{d\vec{R}(r, \theta)}{dr} \times \frac{d\vec{R}(r, \theta)}{d\theta}$ 를 계산한다.

이때 이 P점은 β 점 기준으로 같은 거리이고, 임의의 θ 이므로 P점 부근 입자들의 관측되는 사건은 관찰 중심 C 기준으로 동시가 아니고, 따라서 각 P 사건에서의 우주의 크기가 C 기준으로 다르다. 따라서 이 미소 영역에서 평행사변형인 면적은 정규화 된 우주로 투영되어야 하며 이 경우 무한소인 영역의 경우이므로 평행사변형으로서의 특성은 변하지 않고 크기만 변한다.

그것을 보정한 식은 $\frac{d\vec{R}(r, \theta)/T}{dr} \times \frac{d\vec{R}(r, \theta)/T}{d\theta}$ 이고, 여기에서 z 축 성분의 표현은 β 관성계 기준의 천구의 경우이므로 $rd\phi$ 이 된다. 그리고, 이는 $\phi \rightarrow 0$ 부근에서만 고려하면 되므로 사실상 r 에 만 비례하는 z 축만의 값이다. 다만, 점 P 사건의 시간은 앞서 말한 대로 θ 에 따라 차이가 나므로

z축 항 역시 마찬가지로 그 시점의 우주의 크기(시간)로 나누어 주어야 한다. z 항은 앞의 평행사변형과 항상 수직이므로 벡터곱을 할 필요 없이 스칼라곱을 하면 되며 이를 포함 시킨 최종 미소 부피의 비례 식은

$$\frac{d\vec{R}(r,\theta)/T}{dr} \times \frac{d\vec{R}(r,\theta)/T}{d\theta} \cdot \frac{d\vec{R}(r,\theta,\phi)/T}{d\phi}$$

이다. 이는 행렬식으로 편리하게 표현할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} \frac{d\vec{R}(r,\theta)/T}{dr} \cdot \hat{X} & \frac{d\vec{R}(r,\theta)/T}{dr} \cdot \hat{Y} & 0 \\ \frac{d\vec{R}(r,\theta)/T}{d\theta} \cdot \hat{X} & \frac{d\vec{R}(r,\theta)/T}{d\theta} \cdot \hat{Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\vec{R}(r,\theta,\phi)/T}{d\phi} \cdot \hat{Z} \end{vmatrix}$$

이는 β 기준 극 좌표 표현 R벡터가 아닌 계산 12에서 준비한 C 기준 직교 좌표 표현 $X(r,\theta)\hat{X} + Y(r,\theta)\hat{Y}$ 로 표시할 수 있고,

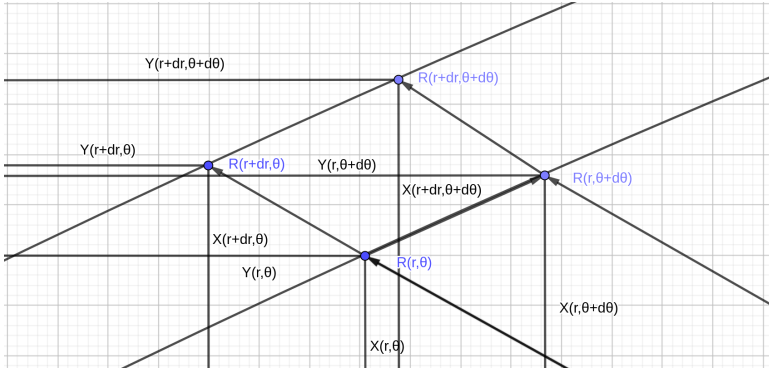


Figure 48: 직교좌표 표현

Z 축, ϕ 방향에 관해서는 z축 만의 값이므로 간단히 정의로부터 직접 구할 수 있으며, $\frac{d\vec{R}(r,\theta,\phi)/T}{d\phi} \cdot \hat{Z} = \frac{dZ(r,\theta,\phi)/T}{d\phi} = \frac{r/2}{T}$ 이다. 1/2이 들어가는 이유는 β 관성계에서의 천구이기 때문이며 이는 관측되는 우주 그림을 통해 설명한 바 있다. 이것과 직교 좌표 위치 표현 $X(r,\theta)\hat{X} + Y(r,\theta)\hat{Y}$ 로 미소 부피의 비를 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} \frac{dX(r,\theta)/T}{dr} & \frac{dY(r,\theta)/T}{dr} & 0 \\ \frac{dX(r,\theta)/T}{d\theta} & \frac{dY(r,\theta)/T}{d\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r/2}{T} \end{vmatrix}$$

확인하려고 하는 것은 점 β 관성계에서 바라본 우주의 균일성과 등방성이므로 β 관성계에서 사용하는 θ_0 의 함수인 X_0 , 와 Y_0 를 이용해야 하고, 이는 계산 18에서 입력해 두었다.

이때, β 점에서 바라보는 우주의 크기 r 은 β 점에서의 우주의 나이이고 이는 C점과 비교하면 보다 적은 $\sqrt{1-\beta^2}$ 이다, 이를 $r/2$ 과 곱한 $\frac{r}{2}\sqrt{1-\beta^2}$ 를 T_0 로 나누어 정규화 된 우주에 투영한다. 물론 β 에서 C를 바라볼 때는 C쪽의 우주의 나이가 $\sqrt{1-\beta^2}$ 라 보겠지만 이것은 상대적이고, 여기서는 기본적으로 관찰 중심 C의 관점에서 바라보는 우주를 기술하고 있다.

이제 이를 모두 적용한 단위 부피의 행렬식을 구할 것이다. 아직 기계의 수식 정리 능력은 조금 부족한지라 수식을 정리하는데 도움이 되는 'tsimp' 함수를 수작업으로 정의하여 대입하는 방식을 통해 인위적으로 수식 간략화 과정에 조금 개입하여 최종 결과를 좀 더 간략하게 확인할 수 있도록 하였다. 이 작업 없이는 지나치게 길고 복잡한 수식이 된다.

friCAS에서의 함수 정의는 `==` 를 사용한다. 부연 하면 `:=` 는 변수 값 할당, `=` 는 단순히 방정식 표기이다. 함수 정의를 할 때도 기호 연산을 사용할 수 있다. 행렬식은 TeXmacs와 연동한 friCAS의 경우 아래처럼 행렬식 기호를 직접 이용하거나 또는 'determinant' 함수에 행렬을 사용하여 입력할 수 있다. 'map' 함수는 함수형 프로그래밍 언어에서 익숙한 고차 함수 'map' 으로서, 'tsimp' 함수를 행렬의 모든 구성 값들에게 일일이 적용하기 위해 사용하였다. 적용한 결과 또한 출력이 직접 표시되게 하기에는 너무 길어 수작업으로 정리한 결과와의 차를 계산하여 그것이 0 또는 0 행렬임을 보여 입력한 행렬 계산의 결과를 보기 편하도록 하였다. 출력을 깔끔하게 보여주기 위한 편법 이었다. 입력을 직접 따라해 보고 있는 독자라면 간략화 되기 전의 출력을 직접 확인해 보기를 권한다.

$$(19)->tsimp(x) == eval\left(x, \sqrt{1 - \cos(\theta_0)^2} = \sin(\theta_0)\right)$$

Type: Void

$$(20) \rightarrow \text{map} \left(\text{tsimp}, \begin{bmatrix} D\left(\frac{x_o}{T_o}, r\right) & D\left(\frac{y_o}{T_o}, r\right) & 0 \\ D\left(\frac{x_o}{T_o}, \theta_o\right) & D\left(\frac{y_o}{T_o}, \theta_o\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{T_o} \end{bmatrix} \right) -$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(-2\beta^2+2) \cos(\theta_o)}{(r\beta \cos(\theta_o)-r+2)^2} & \frac{2 \sin(\theta_o) \sqrt{-\beta^2+1}}{(r\beta \cos(\theta_o)-r+2)^2} & 0 \\ \frac{((-r^2+2r)\beta^2+r^2-2r) \sin(\theta_o)}{(r\beta \cos(\theta_o)-r+2)^2} & \frac{((-r^2+2r) \cos(\theta_o)+r^2\beta) \sqrt{-\beta^2+1}}{(r\beta \cos(\theta_o)-r+2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r \sqrt{-\beta^2+1}}{r\beta \cos(\theta_o)-r+2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Type: Matrix(Expression(Integer))

따라서 정규화 된 미소 부피의 비인 행렬식의 값은

$$(21) \rightarrow \text{detro} := \begin{vmatrix} D\left(\frac{x_o}{T_o}, r\right) & D\left(\frac{y_o}{T_o}, r\right) & 0 \\ D\left(\frac{x_o}{T_o}, \theta_o\right) & D\left(\frac{y_o}{T_o}, \theta_o\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{T_o} \end{vmatrix};$$

$$\frac{2r^2(1-\beta^2)^2}{(r\beta \cos(\theta_o)-r+2)^4} - \text{tsimp}(\text{detro})$$

Type: Expression(Integer)

$$\frac{2r^2(1-\beta^2)^2}{(r\beta \cos(\theta_o)-r+2)^4}$$

임을 알 수 있다.

점 β 에서 바라보는 $r\theta_o\phi$ 극 좌표계에서의 우주의 입자 밀도 비는 관찰되는 지점의 정규화 된 미소 부피의 비와 정규화 된 밀도 분포 $\frac{1}{(1-\beta^2)^2}$ 의 곱이며, 이를 계산하기 위해 계산 13에서 했던 것처럼 $\frac{1}{(1-\beta^2)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x_o^2 + y_o^2}{T_o^2}\right)^2}$ 를 미소 부피의 비에 곱해준다.

$$(22) \rightarrow \text{tsimp} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{x_o^2 + y_o^2}{T_o^2}\right)^2} \begin{vmatrix} D\left(\frac{x_o}{T_o}, r\right) & D\left(\frac{y_o}{T_o}, r\right) & 0 \\ D\left(\frac{x_o}{T_o}, \theta_o\right) & D\left(\frac{y_o}{T_o}, \theta_o\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{T_o} \end{vmatrix} \right)$$

$$\frac{r^2}{8r^2-16r+8}$$

Type: Expression(Integer)

이 결과를 조금 더 정리하면 $\frac{1}{8} \left(\frac{r}{1-r} \right)^2$ 이 된다. 이는 θ_0 와 무관한 모든 방향으로 동일한 식이므로 이로써 우주의 등방성을 만족함을 확인하였다.

우주의 나이 식에서의 경우와 마찬가지로 이 식은 관찰 중심 C에서는 직접적인 방식으로도 구할 수 있어야 한다. 간단히, 계산 14의 결과 $\beta p = \frac{r}{2-r}$ 와 βp 꼴의 밀도 함수 $\frac{1}{(1-\beta p^2)^2}$ 일 때, 정규화 된 우주에서 βp 를 반경으로 하는 체적소의 극 좌표 정의는 $\beta p^2 d\beta p d\theta d\phi$ 이고,

$f(r)$ 을 $r \theta \phi$ 극 좌표에서의 밀도 함수라 할 때

$$\frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2 d\beta p d\theta d\phi = f(r) dr d\theta d\phi \text{ 이므로,}$$

$f(r) = \frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2 \frac{d\beta p}{dr}$ 임을 알 수 있다. 이를 구하면,

$$(23) \rightarrow \text{eval} \left(\frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2 D \left(\frac{r}{2-r}, r \right), \beta p = \frac{r}{2-r} \right)$$

$$\frac{r^2}{8r^2-16r+8}$$

Type: Fraction(Polynomial(Integer))

이로써 중심 관성계 C에서의 우주의 밀도 분포와 임의의 β 관성계에서 바라보는 우주의 밀도 분포의 꼴은 극 좌표계에서

$$\frac{1}{8} \left(\frac{r}{1-r} \right)^2$$

로 동일하고, 우주는 균일하고 등방함을 확인하였다.

여기서 우주에서 거리를 기술하는 방식에 세 가지가 유의할 만 함을 알 수 있다. r 과 적색편이 $z+1$ 에 대응하는 거리 그리고 βp 이다. 각 거리 간의 관계는 계산 14와 15의 결과를 이용하여 구할 수 있다. z 보다 $z+1$ 이 보다 편리하므로 이를 zn 이라 부르고 사용하기로 한다.

먼저 계산 14, 15로부터 이미 정의된 값들은 $zn = \sqrt{\frac{1+\beta p}{1-\beta p}}$ 일 때, $\beta p = \frac{r}{2-r}$, $zn = \frac{1}{\sqrt{1-r}}$ 이다. 이들을 이용하여 빠진 나머지 관계들을 계산하면,

$$(24) \rightarrow \begin{aligned} & \text{solve} \left(\beta p = \frac{r}{2-r}, r \right), \\ & \text{solve} \left(zn = \frac{1}{\sqrt{1-r}}, r \right), \\ & \text{solve} \left(zn = \sqrt{\frac{1+\beta p}{1-\beta p}}, \beta p \right) \\ & [[r = \frac{2\beta p}{\beta p+1}], [r = \frac{zn^2-1}{zn^2}], [\beta p = \frac{zn^2-1}{zn^2+1}]] \end{aligned}$$

Type: Tuple(List(Equation(Expression(Integer))))

세 가지 거리 정의들 간의 관계식들을 모두 정리하면

$$\begin{aligned} \beta_p &= \frac{r}{2-r} \\ \beta_p &= \frac{zn^2-1}{zn^2+1} \\ r &= \frac{2\beta_p}{\beta_p+1} \\ r &= \frac{zn^2-1}{zn^2} \\ zn &= \frac{1}{\sqrt{1-r}} \\ zn &= \sqrt{\frac{1+\beta_p}{1-\beta_p}} \end{aligned}$$

이며, 거리 표기를 r 대신 zn 이나 βp 로 바꾸어서 계산 22, 23의 극 좌표 밀도 함수를 구해볼 수 있다.

$$\frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2 d\beta p d\theta d\phi = f(zn) dzn d\theta d\phi \rightarrow f(zn) = \frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2 \frac{d\beta p}{dzn}$$

,

$$\frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2 d\beta p d\theta d\phi = f(\beta p) d\beta p d\theta d\phi \rightarrow f(\beta p) = \frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2$$

로부터

$$(25) \rightarrow \text{eval} \left(\left(\frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2, \beta p = \frac{zn^2-1}{zn^2+1} \right) D \left(\frac{zn^2-1}{zn^2+1}, zn \right), \right. \\ \left. \frac{1}{(1-\beta p^2)^2} \beta p^2 \right. \\ \left. \left[\frac{zn^4-2zn^2+1}{4zn^3}, \frac{\beta p^2}{\beta p^4-2\beta p^2+1} \right] \right)$$

Type: Tuple(Fraction(Polynomial(Integer)))

밀도 함수로 계산 22의 결과를 이용할 수도 있다.

$$(26) - > \text{eval} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{r}{1-r} \right)^2, r = \frac{zn^2-1}{zn^2} \right) D \left(\frac{zn^2-1}{zn^2}, zn \right),$$

$$\text{eval} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{r}{1-r} \right)^2, r = \frac{2\beta p}{\beta p+1} \right) D \left(\frac{2\beta p}{\beta p+1}, \beta p \right)$$

$$\left[\frac{zn^4-2zn^2+1}{4zn^3}, \frac{\beta p^2}{\beta p^4-2\beta p^2+1} \right]$$

Type: Tuple(Fraction(Polynomial(Integer)))

재미 삼아 앞서의 계산 22를 다른 zn 거리 기준으로 하는 것도 소개해 둔다.

$$(27) - > \text{eq} := r = \frac{zn^2-1}{zn^2},$$

$$Tzn := \text{eval}(To, \text{eq}),$$

$$Xzn := \text{eval}(xo, \text{eq}),$$

$$Yzn := \text{eval}(yo, \text{eq})$$

$$\left[r = \frac{zn^2-1}{zn^2}, \frac{(zn^2-1)\beta \cos(\theta o) + zn^2+1}{2zn^2}, \frac{(zn^2-1) \cos(\theta o) + (zn^2+1)\beta}{2zn^2}, \frac{(zn^2-1)\sqrt{-\beta^2+1}\sqrt{-\cos(\theta o)^2+1}}{2zn^2} \right]$$

Type: Tuple(Any)

$$(28) - > \text{map} \left(\text{tsimp}, \left(\begin{array}{ccc} D \left(\frac{Xzn}{Tzn}, zn \right) & D \left(\frac{Yzn}{Tzn}, zn \right) & 0 \\ D \left(\frac{Xzn}{Tzn}, \theta o \right) & D \left(\frac{Yzn}{Tzn}, \theta o \right) & 0 \\ 0 & 0 & \text{eval} \left(\frac{r}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{To}, \text{eq} \right) \end{array} \right) \right) -$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{(-4zn\beta^2+4zn) \cos(\theta o)}{((zn^2-1)\beta \cos(\theta o) + zn^2+1)^2} & \frac{4zn \sin(\theta o) \sqrt{-\beta^2+1}}{((zn^2-1)\beta \cos(\theta o) + zn^2+1)^2} & 0 \\ \frac{(zn^4-1)\beta^2 - zn^4+1}{((zn^2-1)\beta \cos(\theta o) + zn^2+1)^2} \sin(\theta o) & \frac{((zn^4-1) \cos(\theta o) + (zn^4-2zn^2+1)\beta) \sqrt{-\beta^2+1}}{((zn^2-1)\beta \cos(\theta o) + zn^2+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(zn^2-1) \sqrt{-\beta^2+1}}{(zn^2-1)\beta \cos(\theta o) + zn^2+1} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Type: Matrix(Expression(Integer))

$$(29) - > \frac{4zn \frac{(1-\beta^2)^2}{(zn^2-1)^2}}{(\beta \cos(\theta o) + \frac{zn^2+1}{zn^2-1})^4} - \text{tsimp} \left(\begin{array}{ccc} D \left(\frac{Xzn}{Tzn}, zn \right) & D \left(\frac{Yzn}{Tzn}, zn \right) & 0 \\ D \left(\frac{Xzn}{Tzn}, \theta o \right) & D \left(\frac{Yzn}{Tzn}, \theta o \right) & 0 \\ 0 & 0 & \text{eval} \left(\frac{r}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{To}, \text{eq} \right) \end{array} \right)$$

0

Type: Expression(Integer)

$$(30) - > \frac{4zn \frac{(1-\beta^2)^2}{(zn^2-1)^2}}{(\beta \cos(\theta o) + \frac{zn^2+1}{zn^2-1})^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{Xzn^2+Yzn^2}{Tzn^2} \right)^2}$$

$$\frac{zn^4-2zn^2+1}{4zn^3}$$

Type: Expression(Integer)

세 가지 거리 표현으로 극 좌표 우주 밀도 함수를 정리하면 다음과 같다.

먼저 $drd\theta d\phi$ 로 정의되는 미소 영역에 대하여

$$\frac{1}{8} \left(\frac{r}{1-r} \right)^2$$

이고, $dznd\theta d\phi$ 로 정의되는 미소 영역에 대하여

$$\frac{1}{4zn} \left(\frac{zn^2 - 1}{zn} \right)^2$$

그리고, $d\beta_p d\theta d\phi$ 로 정의되는 미소 영역에 대하여

$$\left(\frac{\beta p}{1 - \beta p^2} \right)^2$$

이다. 이제 우주입자밀도 구조에서의 균일성 및 등방성은 확인하였고, 우주배경복사를 분석 해보기로 한다.

2.7 도플러 분사출, 도플러 편이와 흑체복사

우주배경복사를 분석할 이론적인 토대로서 먼저 도플러 분사출을 계산한다. 도플러 분사출 또는 상대론적 분사출 (Doppler beaming, Relativistic beaming) 이란 광행차의 반대 개념으로서 광속에 가까운 속도로 움직이는 물체에서 방사되는 빛은 전방으로 집중적으로 몰리게 되는 현상을 말한다.

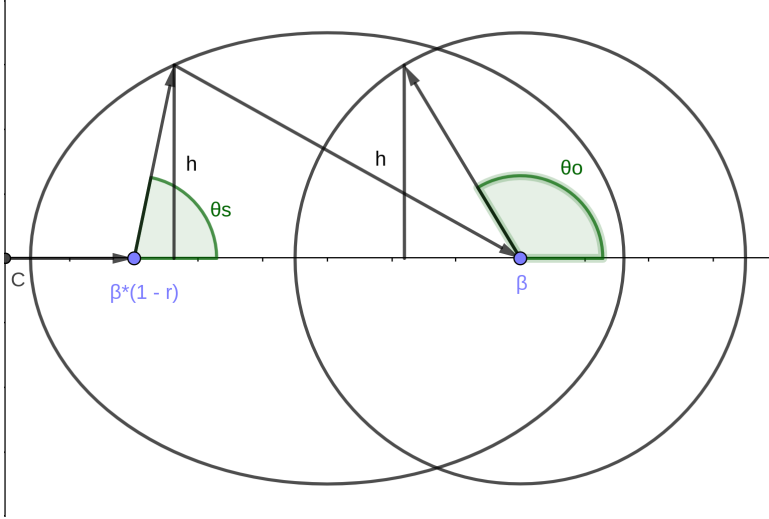


Figure 49: 광행차의 역 도플러 분사출

광행차 표현과 동일한 상대적인 천구 그림을 응용하여 도플러 분사출을 표현하는 그림으로 쓸 수 있다. β 관성계에서 θ_o 각도로 방사되는 빛은 C 관성계에서는 θ_s 각도로 좀 더 전방을 향하여 방사되는 것으로 보일 것이다.

이때 β 관성계에서의 구체에서는 θ_o 에서의 미세각 $d\theta_o$ 인 고리를 이루는 면적을 통해 흘러나가는 광자는 전체 광자중 $\frac{2\pi r \sin(\theta_o) r d\theta_o}{4\pi r^2} = \frac{\sin(\theta_o) d\theta_o}{2}$ 만큼이다. 이것이 C 관성계에서는 $\frac{\sin(\theta_s) d\theta_s}{2}$ 인 미세면적 으로 흘러나가는 것으로 관찰되므로 그 분사출 강도비는

$$\frac{\sin(\theta_o) d\theta_o}{\sin(\theta_s) d\theta_s}$$

이다. 이를 계산한다.

먼저 $\beta(1-r)$ 점 과 θ_s 기준 타원의 방정식은 $\frac{r}{2} \frac{1-\beta^2}{1-\beta \cos(\theta_s)}$ 이므로

$$(31) \rightarrow \text{solve} \left(\frac{r}{2} \frac{1-\beta^2}{1-\beta \cos(\theta_s)} \sin(\theta_s) = \frac{r}{2} \sqrt{1-\beta^2} \sin(\theta_o), \theta_o \right)$$

$$[\theta_o = \text{asin}(\frac{(\beta^2-1) \sin(\theta_s)}{(\beta \cos(\theta_s)-1) \sqrt{-\beta^2+1}})]$$

Type : List (Equation (Expression (Integer)))

따라서

$$\frac{\sin(\theta_o)}{\sin(\theta_s)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta_s)}$$

임을 알수있다.

이제 $\frac{d\theta_o}{d\theta_s}$ 를 구하면,

$$(32) \rightarrow \frac{d\theta_o}{d\theta_s} = \text{eval} \left(D \left(\text{asin} \left(\frac{(\beta^2-1) \sin(\theta_s)}{(\beta \cos(\theta_s)-1) \sqrt{-\beta^2+1}} \right), \theta_s \right), \sin(\theta_s) = \sqrt{1-\cos(\theta_s)^2} \right)$$

$$\frac{d\theta_o}{d\theta_s} = \frac{(\cos(\theta_s)-\beta) \sqrt{-\beta^2+1}}{(\beta^2 \cos(\theta_s)^2 - 2\beta \cos(\theta_s) + 1) \sqrt{\frac{\cos(\theta_s)^2 - 2\beta \cos(\theta_s) + \beta^2}{\beta^2 \cos(\theta_s)^2 - 2\beta \cos(\theta_s) + 1}}}$$

Type : Equation (Expression (Integer))

위 결과를 정리하면,

$$\frac{d\theta_o}{d\theta_s} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta_s)} = \frac{\sin(\theta_o)}{\sin(\theta_s)}$$

그러므로 분사출 강도비는,

$$\frac{\sin(\theta_o) d\theta_o}{\sin(\theta_s) d\theta_s} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos(\theta_s))^2}$$

이다.

도플러 편이에 사용하게 될 θ_s 는 다음의 그림으로 정의한다.

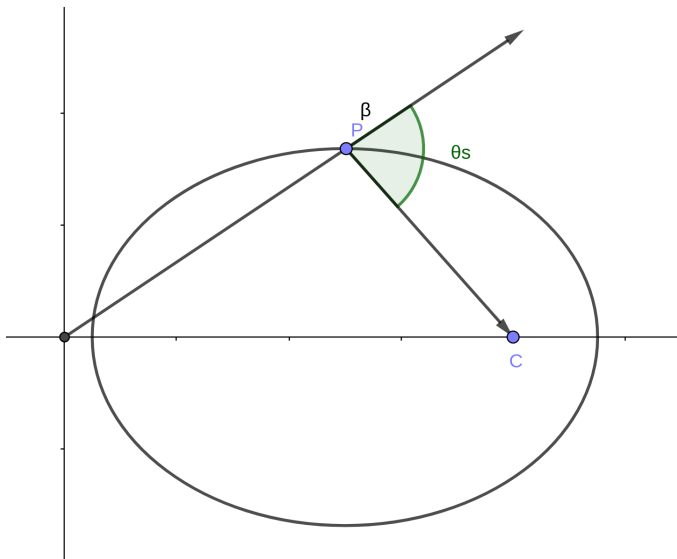


Figure 50: 방사되는 각도

점 P에서 β 의 속도로 움직이는 물체가 θ_s 각도로 내는 빛을 점 C의 정지한 관찰자가 볼 때를 상징한다. 이는 분사출 강도비에서의 θ_s 와 의미를 일치 시키기 위함이다.

P와 C의 관찰 중심 기준 상대 속도의 크기는 $-\beta \cos(\theta_s)$ 이므로 고전적인 주파수에 관한 도플러 편이 식은 $\frac{1}{1-\beta \cos(\theta_s)}$ 이다. 상대론적 도플러 편이 식은 여기에 P의 시간이 흐르는 속도를 곱한 값이므로 상대론적 도플러 편이는

$$\frac{1}{z+1} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta_s)}$$

이다. 이때 도플러 편이에 의한 방출되는 빛의 강도 변화는, 방출되는 광자의 에너지가 $\frac{1}{z+1}$ 에 비례하고, 광자의 방출률 또한 $\frac{1}{z+1}$ 에 비례하며, 도플러 편이에 의한 에너지 방출률은 그 제곱에 비례하므로,

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos(\theta_s))^2}$$

이는 앞서 구한 도플러 분사출에 의한 효과와 정확히 일치한다. 그러므로 도플러 분사출 효과와 도플러 편이를 전부 고려한 에너지 방출률은 관측되는 적색편이만으로 결정되며

$$\frac{1}{(z+1)^4} = \frac{(1-\beta^2)^2}{(1-\beta \cos(\theta_s))^4}$$

이다. 여기에 거리에 따른 역 제곱의 법칙을 고려하면, 어떤 별이나 은하의 광도는 그 별이나 은하와의 거리의 역 제곱인 $\frac{1}{r^2}$ 과 $\frac{1}{(Z+1)^4}$ 에 비례하는 식

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{(z+1)^4}$$

에 따르는 광도로 보일 것을 시사한다.

이 결과는, P 위치의 어떤 물질에 의한 흑체 복사가 도플러 편이 되었을 경우의 단위 면적 당 방출률을 따져보면, 온도 T와 정 비례하는 주파수는 $\frac{1}{zn} = \frac{1}{z+1}$ 에 따라 편이 되므로, 관측되는 단위 면적 당 방출률은 관측되는 온도의 4제곱에 따르게 되어, 이상적인 흑체 복사에서의 에너지 방출률을 나타내는 슈테판-볼츠만 공식 $\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4$ 의 온도의 4제곱에 따른 방출률을 항상 만족 시킬 것임을 알 수 있다.

앞서의 식을 r 또는 z 만의 식으로 나타내면

$$\left(\frac{1-r}{r} \right)^2$$

, 과

$$\frac{1}{z^2(z+2)^2}$$

이다. 이 식들은 상대적인 거리와 광도를 뜻하고 있으므로 주의해서 사용해야 할 것이다.

이제 전 방향 우주에서 방출되는 우주배경복사의 경우 부분적 온도 분포에 따르는 완벽한 흑체복사로 관측될 것임을 확인 하였다. 이를 바탕으로 우주배경복사를 다루어 볼 것이다.

2.8 우주배경복사

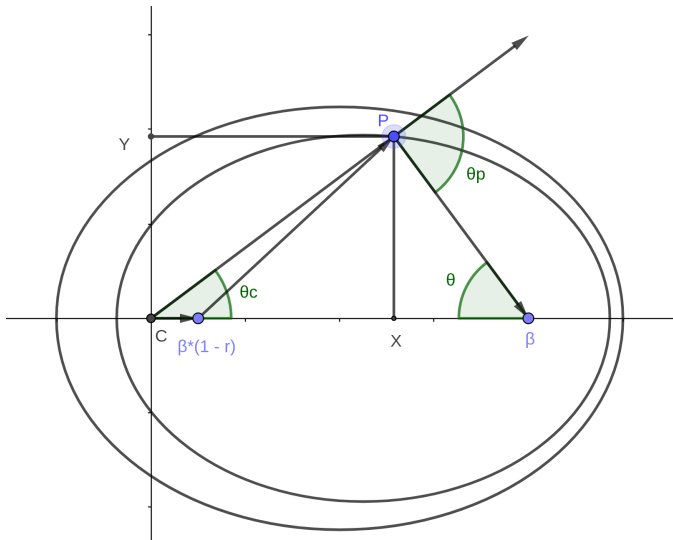


Figure 51: 우주배경복사

우주배경복사에 대한 상대 운동은 우주배경복사 그림을 통하여 기술된다. 점 β 관성계는 원시 관성계이고 β 의 속도로 중심 C로부터 멀어지고 있다. 이때 β 에 위치하면서 관찰 중심 C에 대해 정지한 관찰자가 있다면 그 관찰자는 그 위치에서의 원시 관성계인 β 에서 볼 때 β 의 속도로 중심 C를 향하여 운동하는 것으로 볼 수 있다. 이때 우주배경복사는 관측 타원 $\frac{r}{2} \frac{1-\beta^2}{1-\beta \cos(\theta)}$ 상의 점 P에서 발생하여 $\theta_c + \theta = \theta_p$ 인 각도로 P에서 β 로 향하는 빛이다. 계산 12에서처럼 기본적인 값들을 미리 입력해두고,

$$(33) - > \quad \begin{aligned} R\theta &:= \frac{r}{2} \frac{1-\beta^2}{1-\beta \cos(\theta)}, \\ Ts &:= 1-r, \\ Te &:= r-R\theta, \\ x &:= \beta-R\theta \cos(\theta), \\ y &= R\theta \sin(\theta), \\ y &:= R\theta \sqrt{1-\cos(\theta)^2} \\ \left[\frac{r\beta^2-r}{2\beta \cos(\theta)-2}, -r+1, \frac{2r\beta \cos(\theta)-r\beta^2-r}{2\beta \cos(\theta)-2}, \frac{((-r+2)\beta^2+r) \cos(\theta)-2\beta}{2\beta \cos(\theta)-2} \right], \\ \frac{(r\beta^2-r)\sqrt{-\cos(\theta)^2+1}}{2\beta \cos(\theta)-2} &= \frac{(r\beta^2-r) \sin(\theta)}{2\beta \cos(\theta)-2}, \frac{(r\beta^2-r)\sqrt{-\cos(\theta)^2+1}}{2\beta \cos(\theta)-2} \end{aligned}$$

새로이 추가적으로 필요한 값들을 계산하고,

$$\frac{1}{z+1} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta p)} = fr$$

을 구하면

$$(34) -> \theta c := \operatorname{acos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\theta p := \theta c + \theta,$$

$$\beta p := \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{Ts+Te}$$

$$\left[\operatorname{acos}\left(\frac{((-r+2)\beta^2+r)\cos(\theta)-2\beta}{(2\beta\cos(\theta)-2)\sqrt{\frac{((-4r+4)\beta^4+4r\beta^2)\cos(\theta)^2+((4r-8)\beta^3-4r\beta)\cos(\theta)+r^2\beta^4+(-2r^2+4)\beta^2+r^2}}}{4\beta^2\cos(\theta)^2-8\beta\cos(\theta)+4}}\right), \right.$$

$$\left. \operatorname{acos}\left(\frac{((-r+2)\beta^2+r)\cos(\theta)-2\beta}{(2\beta\cos(\theta)-2)\sqrt{\frac{((-4r+4)\beta^4+4r\beta^2)\cos(\theta)^2+((4r-8)\beta^3-4r\beta)\cos(\theta)+r^2\beta^4+(-2r^2+4)\beta^2+r^2}}}{4\beta^2\cos(\theta)^2-8\beta\cos(\theta)+4}}\right) + \theta, \right.$$

$$\left. \frac{(2\beta\cos(\theta)-2)\sqrt{\frac{((-4r+4)\beta^4+4r\beta^2)\cos(\theta)^2+((4r-8)\beta^3-4r\beta)\cos(\theta)+r^2\beta^4+(-2r^2+4)\beta^2+r^2}}{4\beta^2\cos(\theta)^2-8\beta\cos(\theta)+4}}}{2\beta\cos(\theta)-r\beta^2+r-2}} \right]$$

Type : Tuple (Expression (Integer))

$$(35) -> fr := \frac{\sqrt{1-\beta p^2}}{1-\beta p \cos(\theta p)};$$

$$ar := (2\beta\cos(\theta)-2)\sqrt{\frac{((-4r+4)\beta^4+4r\beta^2)\cos(\theta)^2+((4r-8)\beta^3-4r\beta)\cos(\theta)+r^2\beta^4+(-2r^2+4)\beta^2+r^2}{4\beta^2\cos(\theta)^2-8\beta\cos(\theta)+4}};$$

$$fr - \frac{(-2\beta\cos(\theta)+r\beta^2-r+2)\sqrt{\frac{4(1-\beta\cos(\theta))^2(1-\beta^2)(1-r)}{(-2\beta\cos(\theta)+r\beta^2-r+2)^2}}}{ar\cos(\operatorname{acos}\left(\frac{((-r+2)\beta^2+r)\cos(\theta)-2\beta}{ar}\right)+\theta)-2\beta\cos(\theta)+r\beta^2-r+2} = 0$$

$$0 = 0$$

Type : Equation (Expression (Integer))

원 출력은 너무 길어 표시를 막고, 그 식을 수동으로 축약하여 원 식과 같은지 확인 하였다. 이 식은 우선은 수치 계산으로 다룰 것이다.

이때, 앞서 우주배경복사 그림에서의 정지한 관찰자가 움직이는 P점의 물체로부터의 흑체복사를 관찰하는 것과는 반대로, 사망에서 입사하는 흑체복사 배경을 바탕으로 움직이는 물체가 받아들이는 빛의 도플러 편이를 계산 34의 표기에 맞추어 구하면,

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1+\beta\cos(\theta i)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

이다. 분자는 고전적인 도플러 편이에 따른 항이고 분모는 움직이는

관찰자의 상대론적인 시간 지연에 따른 항이다. 그리고 θ_i 는 정지한 C 관찰자 시점의 입사각이므로 이를 움직이는 물체가 관찰할 때의 광행차를 적용한 θ 로 바꾸어주어야 한다.

θ_i 와 θ 의 관계는 도플러 분사출 그림을 참고하되 타원의 방정식의 코사인 항의 부호만 정확히 정하면 되므로, 계산 34와 표기를 맞추도록 적당히 가상의 그림을 가정하여 구하면,

$$(36) - > \text{solve} \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta \cos(\theta_i)} \sqrt{1-\cos(\theta_i)^2} = \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1-\cos(\theta)^2}, \theta_i \right) \\ [\theta_i = \text{acos}(\frac{-\cos(\theta)+\beta}{\beta \cos(\theta)-1}), \theta_i = \text{acos}(\frac{-\cos(\theta)-\beta}{\beta \cos(\theta)+1})] \\ \text{Type : List (Equation (Expression (Integer)))}$$

이 경우 왼쪽 식을 써야 하므로 광행차를 고려한 이동하는 물체 입장에서 관측하는 도플러편이

$$(37) - > \text{eval} \left(\frac{1+\beta \cos(\theta_i)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \theta_i = \text{acos} \left(\frac{\cos(\theta)-\beta}{1-\beta \cos(\theta)} \right) \right) \\ \frac{\beta^2-1}{(\beta \cos(\theta)-1) \sqrt{-\beta^2+1}} \\ \text{Type : Expression (Integer)}$$

정리하면,

$$\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}$$

첫 번째 계산 35의 fr 식은 β_p 에 의한 식으로 우주의 팽창에 따른 도플러 편이와 β 위치에 대한 상대적인 운동으로 인한 도플러 편이의 영향이 합쳐진 식이고, 위의 계산 37의 두 번째 식은, β 로 표현되는 움직이는 물체가 관찰하게 되는 도플러 편이만을 고려하는 식이므로, 첫 번째 식에 우주의 팽창에 따른 도플러 편이 효과를 상쇄하기 위하여 $\frac{1}{\sqrt{1-r}}$ 을 곱하여 상대적인 움직임에 따른 항만을 남겨 두 번째와 비교할 것이다.

friCAS의 수치 계산 유효숫자는 'digits' 함수를 이용하여 설정할 수 있다. 'eval' 함수는 한번에 여러 개의 대입을 동시에 할 수 있으며, 그 대입 될 관계가 다수일 경우 리스트로 입력 받는다. 'cons' 함수는 Lisp 언어 사용자에게는 익숙한 pn의 주어진 입력 리스트의 첫 머리에 $r = 0.1$ 항목을 추가한 리스트를 만들라는 의미의 함수이다.

$$(38) - > \text{digits}(256), \\ pn := [\beta = 0.7, \theta = 0.3\pi]$$

$$[20, [\beta = 0.7, \theta =$$

0.9424777960 7693797153 8793014983 8508652591 5081981253 1746292483
3776923449 2188586269 9588410447 6026351203 9464442595 3984691994
1281533828 6517466951 7607822438 5443352350 8523081058 1556331667
8933868846 8647911458 9328643292 6997800338 3854269447 0136034949
5813605727 436946]]

Type : Tuple (Any)

$$(39) - > \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.1, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.2, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.5, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.75, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.9, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right)$$

$$[-0.1 \text{ E } -254, 0.0, 0.7 \text{ E } -256, -0.4 \text{ E } -255, -0.1 \text{ E } -255]$$

Type : Tuple (Expression (Float))

$$(40) - > pn[\beta = 0.5, \theta = 0.9\pi]$$

[$\beta = 0.5, \theta = 2.8274333882$ 3081391461 6379044951 5525957774 5245943759
5238877450 1330770347 6565758809 8765231342 8079053611 8393327786
1954075982 3844601485 9552400855 2823467315 6330057052 5569243174
4668995003 6801606540 5943734376 7985929878 0993401015 1562808341
0408104848 7440817182 31084]

Type : List (Equation (Polynomial (Float)))

$$(41) - > \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.1, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.2, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.5, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.75, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right), \\ \text{eval} \left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \text{cons}(r = 0.9, pn) \right) - \text{eval} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}, pn \right)$$

$$[-0.1 \text{ E } -255, 0.3 \text{ E } -256, 0.0, 0.0, -0.3 \text{ E } -256]$$

Type : Tuple (Expression (Float))

첫 번째 식이 형태만 복잡할 뿐, 두 식의 값은 설정한 유효숫자 255 범위 내에서 같음을 알 수 있다. 유효숫자를 더 크게 설정하여도 마찬가지이다. 즉 우주배경복사에 대해서는 배경 복사가 발생하는 r이나 z+1이 어떠한 거리이건 배경 복사를 정지한 배경으로 두고 자신이 움직이고 있는 관찰자가 보는 것과 일치한다.

모든 결과를 정리하면 우주배경복사는 그 발생하는 거리와 관측 자의 배경 복사에 대한 상대 운동이나 혹은 배경 복사 원천의 움직임에 관계없이 우주 끝의 완벽한 흑체복사로 볼 수 있다.

수치 계산으로 두 식이 동일함을 확인 하였지만 실제로 수식을 정리 하여 동일함을 확인할 수도 있다. 조금 손이 많이 가는 작업이기는 하지만 friCAS의 도움을 받는 다음의 수작업 과정을 통하여 수행해 보기로 한다.

$$(42) \rightarrow f_{n1} := \frac{((-r+2)\beta^2+r)\cos(\theta)-2\beta}{(2\beta\cos(\theta)-2)\sqrt{\frac{((-4r+4)\beta^4+4r\beta^2)\cos(\theta)^2+((4r-8)\beta^3-4r\beta)\cos(\theta)+r^2\beta^4+(-2r^2+4)\beta^2+r^2}{4\beta^2\cos(\theta)^2-8\beta\cos(\theta)+4}}},$$

$$f_{r2} := \text{eval}\left(\frac{fr}{\sqrt{1-r}}, \cos(\text{acos}(f_{n1}) + \theta) = \left(\cos(\theta)f_{n1} - \sin(\theta)\sqrt{1-(f_{n1})^2}\right)\right);$$

Type : Tuple (Expression (Integer))

여기서 복잡한 식은 fr 이다.

$$\begin{aligned} & (-2*\beta*\cos(\theta)+r*\beta^2-r+2)*\text{sqrt}((((4*r-4)*\beta^4+(-4*r+4)*\beta^2)*\cos(\theta)^2 \\ & +((-8*r+8)*\beta^3+(8*r-8)*\beta)*\cos(\theta)+(4*r-4)*\beta^2-4*r+4)/(4*\beta^2*\cos(\theta)^2 \\ & +(-4*r*\beta^3+(4*r-8)*\beta)*\cos(\theta)+r^2*\beta^4+(-2*r^2+4*r)*\beta^2 \\ & +r^2-4*r+4)))/((2*\beta*\cos(\theta)-2)*\text{sqrt}(((((-4*r+4)*\beta^4+4*r*\beta^2)*\cos(\theta)^2 \\ & +((4*r-8)*\beta^3-4*r*\beta)*\cos(\theta)+r^2*\beta^4+(-2*r^2+4)*\beta^2 \\ & +r^2)/(4*\beta^2*\cos(\theta)^2-8*\beta*\cos(\theta)+4))*\cos(\text{acos}(((((-r+2)*\beta^2+r) \\ & *\cos(\theta)-2*\beta)/((2*\beta*\cos(\theta)-2)*\text{sqrt}(((((-4*r+4)*\beta^4+4*r*\beta^2)*\cos(\theta)^2 \\ & +((4*r-8)*\beta^3-4*r*\beta)*\cos(\theta)+r^2*\beta^4+(-2*r^2+4)*\beta^2+r^2) \\ & p/(4*\beta^2*\cos(\theta)^2-8*\beta*\cos(\theta)+4))))+\theta)-2*\beta*\cos(\theta)+r*\beta^2-r+2) \end{aligned}$$

직접 표시할 수 없을 정도로 복잡하여 friCAS의 출력을 막았지만 출발 점이니 만큼 문자열로나마 표시하였다. 이 계산을 따라해 보고 있다면 직접 friCAS 출력으로 볼 수 있을, 이 식에 포함된

$$\cos(\text{acos}(\frac{((-r+2)\beta^2+r)\cos(\theta)-2\beta}{(2\beta\cos(\theta)-2)\sqrt{\frac{((-4r+4)\beta^4+4r\beta^2)\cos(\theta)^2+((4r-8)\beta^3-4r\beta)\cos(\theta)+r^2\beta^4+(-2r^2+4)\beta^2+r^2}{4\beta^2\cos(\theta)^2-8\beta\cos(\theta)+4}})})+\theta)$$

식을 간략화 하기위해, 삼각함수에서의 규칙 공식

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

과 $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ 을 이용하여 arccos 항을 없애기 위한 대입 규칙을 만들어 적용 하였고 결과를 fr2에 저장하였다.

$$(43) - > fn2 := \sqrt{\frac{((-4r+4)\beta^4 + 4r\beta^2)\cos(\theta)^2 + ((4r-8)\beta^3 - 4r\beta)\cos(\theta) + r^2\beta^4 + (-2r^2+4)\beta^2 + r^2}{4\beta^2\cos(\theta)^2 - 8\beta\cos(\theta) + 4}},$$

$$fn3 := \frac{\sqrt{((-4r+4)\beta^4 + 4r\beta^2)\cos(\theta)^2 + ((4r-8)\beta^3 - 4r\beta)\cos(\theta) + r^2\beta^4 + (-2r^2+4)\beta^2 + r^2}}{(2-2\beta\cos(\theta))},$$

$$fr3 := eval(fr2, fn2 = fn3);$$

Type : Tuple (Expression (Integer))

앞서의 결과를 새로운 입력으로 하여 다시 포함된 fn2식은 fn3식으로 간소화 시켜 fr3에 저장하도록 하였다. 분모가 항상 양수이므로 가능하다. 역시 결과가 너무 길어서 표시되지 않도록 하였다.

$$(44) - > fn4 := \sqrt{\frac{(r^2\beta^4 - 2r^2\beta^2 + r^2)\cos(\theta)^2 - r^2\beta^4 + 2r^2\beta^2 - r^2}{((4r-4)\beta^4 - 4r\beta^2)\cos(\theta)^2 + ((-4r+8)\beta^3 + 4r\beta)\cos(\theta) - r^2\beta^4 + (2r^2-4)\beta^2 - r^2}},$$

$$fn5 := \sqrt{((-4r+4)\beta^4 + 4r\beta^2)\cos(\theta)^2 + ((4r-8)\beta^3 - 4r\beta)\cos(\theta) + r^2\beta^4 + (-2r^2+4)\beta^2 + r^2},$$

$$fn6 := \sqrt{-((r^2\beta^4 - 2r^2\beta^2 + r^2)\cos(\theta)^2 - r^2\beta^4 + 2r^2\beta^2 - r^2)},$$

$$fr4 := eval(fr3, [fn4 = fn6, fn5 = 1]);$$

Type : Tuple (Expression (Integer))

fr3을 실제로 보면 보면 분모에 fn4와 fn5를 곱하는 부분이 있는데 이를 자동으로 상쇄를 못시키므로 강제로 그 부분을 없애기 위하여 fn5에 1을 대입하고 fn4는 분자만 남겼다.

$$(45) - > fn7 := \sqrt{(-r^2\beta^4 + 2r^2\beta^2 - r^2)\cos(\theta)^2 + r^2\beta^4 - 2r^2\beta^2 + r^2},$$

$$fn8 := r(1 - \beta^2)\sqrt{1 - \cos(\theta)^2},$$

$$fn9 := \sqrt{1 - \cos(\theta)^2},$$

$$fr5 := eval(fr4, [fn7 = fn8, \sin(\theta) = fn9])$$

$$\frac{[\sqrt{(-r^2\beta^4 + 2r^2\beta^2 - r^2)\cos(\theta)^2 + r^2\beta^4 - 2r^2\beta^2 + r^2},$$

$$(-r\beta^2 + r)\sqrt{-\cos(\theta)^2 + 1},$$

$$\sqrt{-\cos(\theta)^2 + 1},$$

$$(-2\beta\cos(\theta) + r\beta^2 - r + 2)\sqrt{\frac{((4r-4)\beta^4 + (-4r+4)\beta^2)\cos(\theta)^2 + ((-8r+8)\beta^3 + (8r-8)\beta)\cos(\theta) + (4r-4)\beta^2 - 4r + 4}{4\beta^2\cos(\theta)^2 + (-4r\beta^3 + (4r-8)\beta)\cos(\theta) + r^2\beta^4 + (-2r^2+4r)\beta^2 + r^2 - 4r + 4}}}{(2\beta^2\cos(\theta)^2 - 4\beta\cos(\theta) + 2)\sqrt{-r+1}}]$$

Type : Tuple (Expression (Integer))

항상 양수임이 보장되므로 fn7을 fn8로 간략화 시킬 수 있고, 남은 sin 함수를 cos 함수로 표기하였다. 이제부터는 결과가 표시 가능할 정도로 간소하므로 표시되도록 하였다.

$$\begin{aligned}
 (46) - & \quad fn10 := \sqrt{\frac{((4r-4)\beta^4 + (-4r+4)\beta^2) \cos(\theta)^2 + ((-8r+8)\beta^3 + (8r-8)\beta) \cos(\theta) + (4r-4)\beta^2 - 4r + 4}{4\beta^2 \cos(\theta)^2 + (-4r\beta^3 + (4r-8)\beta) \cos(\theta) + r^2\beta^4 + (-2r^2+4r)\beta^2 + r^2 - 4r + 4}}, \\
 & \quad fn11 := \frac{2(1-\beta \cos(\theta))\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-r}}{(-2\beta \cos(\theta) + r\beta^2 - r + 2)}, \\
 & \quad fr6 := eval(fr5, fn10 = fn11) \\
 & \quad \left[\sqrt{\frac{((4r-4)\beta^4 + (-4r+4)\beta^2) \cos(\theta)^2 + ((-8r+8)\beta^3 + (8r-8)\beta) \cos(\theta) + (4r-4)\beta^2 - 4r + 4}{4\beta^2 \cos(\theta)^2 + (-4r\beta^3 + (4r-8)\beta) \cos(\theta) + r^2\beta^4 + (-2r^2+4r)\beta^2 + r^2 - 4r + 4}}, \right. \\
 & \quad \left. \frac{(2\beta \cos(\theta) - 2)\sqrt{-\beta^2 + 1}\sqrt{-r+1}}{2\beta \cos(\theta) - r\beta^2 + r - 2}, -\frac{\sqrt{-\beta^2 + 1}}{\beta \cos(\theta) - 1} \right] \\
 & \quad \text{Type : Tuple (Expression (Integer))}
 \end{aligned}$$

fn10의 값 역시 항상 양수임이 보장되므로 fn11로 간소화 될 수 있다. 이를 적용하면 최종적으로 $\frac{fr}{\sqrt{1-r}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)}$ 임을 확인할 수 있다. 이것은 다른 CAS의 경우에는 좀 더 단순한 과정으로 해결될 수 있을 수도 있고 friCAS에서도 앞으로 더욱 개선 될 것으로 본다. 여기에서는 CAS를 사용하며 수 작업을 가미한 방법을 통해 수식을 정리하는 과정을 소개하였는데 자동으로 간소화 되지 않을 경우에도 CAS를 사용하면 복잡하고 지루한 계산을 보다 정확하게 수행할 수 있으니 크게 도움이 됨을 볼 수 있다.

2.9 우주의 총 은하의 수

우주에 존재하는 모든 은하의 수를 간략하게나마 추정할 수 있다. 우주의 어떤 지역에 존재하는 입자의 수와 그 지역의 은하의 수는 비례할 것이므로 입자 밀도 함수를 적분하고, 알려진 어떤 거리 내의 은하의 수와 알려진 가장 먼 최초의 은하와의 거리를 이용하면 간략하게나마 추정할 수 있다.

계산 22의 입자 밀도 함수는 극 좌표 표현이므로 따로 거리에 따른 면적을 계산하여 적분 할 필요 없이 직접 적분 하면 된다. friCAS에서 적분은 'integrate' 함수를 이용한다. 적분 하려는 수식과 적분 할 변수, 그리고 필요하다면 적분 구간을 '..' 두 개의 '.' 을 이용하여 표시하는데 TeXmacs의 수식 모드에서 입력 시 세 개로 입력되기도 하지만 문제는 없다. "noPole" 표시는 적분 구간에 함수의 극점을 포함하지 않는다는 지시이다. 가끔 "potential pole" 와 함께 적분이 실패할 때 적분 하려는 해당 구간 내에는 극점이 없다고 확신할 수 있을 때 입력하면 해결된다. 이 경우에는 $\frac{1}{8} \left(\frac{r}{1-r} \right)^2$ 을 이용하는데 이 식은 $r=1$ 일 때 극점인데 거기까지 적분 할 일은 없으므로 사용할 수 있다.

(47)- >digits(50)

256

Type : PositiveInteger

(48)- >integrate($\frac{1}{8} \left(\frac{r}{1-r} \right)^2$, $r = 0..r$, "noPole")

$\frac{(r-1) \log(r^2-2r+1)+r^2-2r}{8r-8}$

Type : Union (f 1 : OrderedCompletion (Expression (Integer)), ...)

$$\frac{(r-1) \log(r^2-2r+1)+r^2-2r}{8r-8} = \frac{1}{4} \log(1-r) + \frac{r}{8} \frac{2-r}{1-r}$$

이 적분 결과를 TG라는 이름의 함수로 준비한다.

(49)- >TG(r) == $\frac{(r-1) \log(r^2-2r+1)+r^2-2r}{8r-8}$

Type : Void

애초에 극 좌표 표현을 사용하였으므로 거리에 따라 늘어나는 표면적을 적분 계산 시 고려할 필요가 없다. 1200만 광년 내에 존재하는 알려진 은하의 수는 152개, 알려진 우주의 나이 138억 년, 2021년 이전 기준 알려진 가장 먼 은하의 $Z=11$ 을 넣어 보기로 한다.

TG는 r 의 함수이므로 계산 24의 $r = \frac{zn^2-1}{zn^2}$ 과 그림 43, 관측되는 우주 그림에서의 정의를 이용한다. 은하의 수가 알려진 거리까지의 총 입자 수로 은하가 등장하기 시작하는 거리까지의 총 입자 수를 나누면 정확하지는 않지만 대략의 우주의 총 은하의 수를 추정할수있다. TG함수는 실제 총 입자 수가 아닌 관측자 기준 1인 상대적 밀도를 적분 한 것이므로, 두 거리 간의 총 입자 수의 비를 구하고 거기에 가까운 거리 내의 알려진 은하의 수를 곱하는 것으로 먼 거리까지의 은하의 수를 구하는 계산이다.

r 이 1일 경우가 최 외곽인데 이는 실제 거리로는 우주의 나이 138억 년 이므로 그 절반인 138/2억 광년에 해당한다. 따라서 분모의 TG에는 r 로서 $2\frac{0.12}{138}$ 을 대입하고 분자의 TG에는 r 로서 $zn=12$ 일 때의 r 인 $\frac{12^2-1}{12^2}$ 을 대입한다. 그 결과는,

$$(50)- >152 \frac{TG\left(\frac{12^2-1}{12^2}\right)}{TG\left(2\frac{0.12}{138}\right)}$$

1159_0774970220.4039828181_3924816361_3966209381_533438
Type : Expression (Float)

약 12조개의 은하가 전 우주에 존재할 것으로 계산된다. 실제로는 은하가 활발하게 생성되기 시작하는 z 는 좀 더 작을 것이고 우주의 나이는 좀 더 될 것으로 생각한다. 가장 그럴듯하게 생각하는 값들을 대입하면,

$$(50)- >152 \frac{TG\left(\frac{7.5^2-1}{7.5^2}\right)}{TG\left(2\frac{0.12}{145}\right)}$$

483_2326279935.1814775736_4809891602_9694219114_6098787
Type : Expression (Float)

약 5조 이며, 2016년의 관측으로 알려진 최신 추정치(arXiv:1607.03909)의 약 2~3배의 값이다. 간략한 추정치로는 잘 맞는 편으로 보며, 좀 더 정확한 값을 얻기 위해서는 은하의 생성이 우주의 나이 기준 어느 한순간에 시작되고 완성되었다는 이 계산의 부정확한 가정을 좀 더 정밀하게 다듬어서 수행해야 하며, 거기에 은하 병합에 관한 지식 그리고 우리가 있는 곳이 은하가 비교적 풍부한 곳인가 혹은 적은 곳 인가에 대한 정보같은 많은 변수에 의해 결정되는 은하 생성 모형에 따른 가중치를 원래의 밀도 함수에 적용하여 적분을 해야 할 것이다. 이 계산의 결과는 매우 간략한 추정치 일 뿐이다.

$$(52)- >152 \frac{TG\left(\frac{6^2-1}{6^2}\right)}{TG\left(2\frac{0.12}{138}\right)}$$

249_0607008872.4504104383_5344625355_4488173356_316798
Type : Expression (Float)

하한치로 생각되는 수치가 2016년 관측/추정치와 비슷하다. 이로 보
건데 은하가 좀 더 발견될 것으로 보인다.

최근 2023년 봄 기준 가장 먼 은하는 $z=13.2$ 인 JADES-GS-z13-0 은
하이다. 제임스 웹 우주 망원경이 가동을 시작한 이후 한동안 수 많은 고
 z 값 은하에 대한 소문이(z 16 이상 20 까지의 은하가 발견 되었다는) 많
았으나, 2023년 2월 현재 기준 공인된 기록은 $z=13.2$ (arXiv:2212.04480)
인 것으로 보고되고 있다. 은하가 평균적으로 생성되는 z 위치가 10을
넘어선다면 위 식에 따른 총 은하의 수는 10조 개를 넘어서게 된다. 위
공식에 $z_n=14.2$ 를 대입하면 약 16.5조 개의 은하를 관측할 수 있는 것으로
계산된다. 그렇게 까지 많은 은하는 없을 것이라 본다. 가장 큰 이유로는
이 우주에 은하가 고르게 분포하고 있지 않으며 물질과 은하들은 그물망
형태로 일부 공간에 밀집하여 존재하고 있다. 따라서 우리가 살고 있는
은하수도 전 우주 평균보다 월등히 은하의 밀도가 높은 영역에 위치하고
있을 가능성이 크기 때문이다. 하지만 반대로 은하가 활발하게 생성되기
시작하는 우주의 나이가 좀 더 이르면 은하의 수는 극적으로 증가하게
된다. 결국 정확한 자료가 밝혀짐에 따라 상당히 변동이 있을 수 밖에 없는
수치 추정이나, 관측되는 추이와 은하 생성에 관한 추정 틀을 바탕으로
대강 짐작해 본다면, 우주의 총 은하의 수에 대해서는 5조를 조금 넘어서는
정도로 추정해 보는 것으로 결론 지으려 한다. 보다 정교한 모형을 통한
보다 정확한 추정은 천문학의 영역으로 맡기려 한다.

2.10 시간에 따른 우주의 온도 변화

특수 상대론 기반 등속 팽창을 하는 우주론에서의 시간에 따른 온도 분포는
간단한 논리로 얻어진다. 우주의 공간을 무슨 공기나 물 혹은 에테르 같은
매질로는 취급하지 않는다. 그저 우주의 열평형 조건을 따지는 것 만으로
충분하다.

The temperature distribution over time in the cosmology of constant
velocity expansion based on special relativity is obtained by simple
logic. The space of the universe is not treated as a medium such as air
or water or ether. It is sufficient to consider only the thermal equilib-
rium conditions of the universe.

어떤 관성계에서 관찰되는 동일 거리 배경 r 에서의 우주의 나이는

$$t = \sqrt{1-r} = time_{there}$$

이며 이때 관찰되는 적색편이는

$$zn = \frac{1}{\sqrt{1-r}}$$

이다. 즉 $1/t$ 의 꼴이다. 이때 관찰자의 주변 우주의 온도가 그 적색편이를 적용한 과거 우주와 열적 평형을 이루기 위한 조건은

$$Temp_{here} = Temp_{there} \frac{Time_{there}}{Time_{here}}$$

또는 일단의 프랑스인 과학자들이 현재 주장하고 있는 '디랙-밀른 우주론 (The Dirac-Milne cosmology)'의 표현처럼

$$t = \frac{1}{H_0} \frac{T_0}{T}$$

(T_0 : 현재 우주의 온도, t : 우주의 나이, H_0 : 허블 상수, T : 그 우주의 나이에서의 우주의 온도)

로써, 우주의 시간에 따른 온도 변화가 이 함수를 따른다면 관찰자가 어떤 방향과 거리의 영역을 관찰하더라도 그 영역이 자신과 열평형을 이루는 것을 보게 된다. 배경과 자신 뿐만 아니라 우주의 모든 부분끼리의 온도 또한 열적 평형을 이루고 있음을 보게 된다. 이것은 위치와 방향에 관계없으므로 어떤 원시 관성계의 관찰자에게도 우주의 균일성과 등방성이 성립함을 알 수 있다.

이는 우주가 수소 원자가 전리되어 가시광선에 대하여 불투명해지는 온도인 3000°K 보다 뜨겁거나 혹은 다른 불투명한 물질의 밀도가 높아 복사에 대하여 불투명하더라도, 즉 관측 가능한 천구의 반경 r 이 미세하더라도 그 범위 내에서만 성립한다면 이를 통하여 전체 우주에서의 열적 평형을 보장할 수 있다. 즉 가시 영역의 크기와는 상관없이 우주의 온도 분포가 동일한 $1/t$ 에 따르는 분포이기만 하면 열평형 조건이 만족 된다.

이것 만으로 사실 우주의 열적 변화에 대한 설명은 다했다고 할 수 있으나 어쩌면 보다 미시적인 설명을 원하는 사람도 있을 수 있을 것이다. 그것을 해보자면, 국소적으로는 우주의 각 원시 관성계의 미소 영역들이 팽창을 할 때, 온도가 높은 입자들은 보다 빠른 속도로 그 영역을 떠나 다른 영역으로 가게 되어 온도가 낮은 입자들만 남게 됨으로서 남은 부분의 온도

가 낮아지게 된다. 반면 외부에서 유입되는 입자들은 관성계들 간의 속도 차에 따라 에너지를 잃은 상태로 유입된다. 그러므로, 팽창에 의해서 모든 부위의 온도는 낮아지게 된다. 그 낮아지는 속도는, 미소 영역의 크기에 대해, 그 미소 영역에는 평균적으로 하나의 입자만 있을 수 있도록 얼마든지 작게 정의할 수 있으므로, 그 미소 영역에서 온도가 낮아지는 속도는 여기에 존재 하던 입자가 아예 판 곳으로 가버린 것이니 그냥 모든 온도를 순간적으로 다 잃는 속도이다. 그러나 그만큼 옆에서 입자가 날아와서 다시 새로운 온도를 정의하게 되는데 그 온도는 관성계 간의 속도 차에 따른 도플러 적색편이 만큼 원래보다 낮아진다. 따라서 그 낮아지는 속도는 적색편이에 따른 열평형 조건인 $1/t$ 을 실시간으로 따르게 될 것임을 알 수 있다.

여기에 다른 무슨 기괴한 가정이 필요하지 않다. 하지만 일반 상대론 기반 온도 계산은 다르다.

일반 상대론 기반 우주론에서 주장하는 빅뱅의 온도와 팽창 시간 계산 식은 다음과 같다.(출처 2020.10.2 <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/expand.html#c3>)

$$t_{exp} = \frac{1}{H} = \sqrt{\frac{3C^2}{8\pi G\rho_0}}$$

T 3000°k 인 경우 에너지 밀도의 대부분은 복사 에너지의 형태이고

$$\rho_{radiation}(T) \approx (0.4MeV/m^3)[\frac{T}{2.7K}]^4$$

식을 따른다고 하며, 이에 따른 최종 식은 다음과 같다.

$$t_{exp} = [\frac{2.7K}{T}]^2 \sqrt{\frac{3C^2}{8\pi G(0.4MeV/m^3)}}$$

T 3000°K 인 경우 복사 에너지의 에너지 밀도에 대한 기여는 미미하다 하고

$$\rho_{mass} = (0.5GeV/m^3)[\frac{T}{2.7K}]^3$$

식을 따르므로 팽창 시간 계산 식은 다음과 같게 된다.

$$t_{exp} = [\frac{2.7K}{T}]^{3/2} \sqrt{\frac{3C^2}{8\pi G(0.5Gev/m^3)}}$$

(t_{exp} : 팽창에 걸린시간, T : 온도, K : 볼츠만 상수, C : 광속, G : 만유인력상수)

이 식은 3000°K 이하의 관측 가능한 우주에서 온도가 시간의 $-3/2$ 승에 비례한다는 결론을 보이고 있다. 하지만, 이것이 도대체 무슨 말인지 알 수가 없는 노릇이다. 진공이 상 변화를 한다고 주장을 하는데 그 증거 따윈 아무것도 없다. 불과 3000°K 라는 지구 상에서도 인류가 수천 년 전부터 쉽게 만들어 온 온도에서 공간의 상 변화를 논하는데 그에 따르는 실험적 물리적 증거 따윈 없이 필요에 따라 주장하고 보는 것이다.

이는 관측 가능한 우주의 응집되지 않은 옅고 차가운 성간 가스의 관측되는 적색편이 된 온도가 우주의 평균 온도와는 다르게 관찰되어야 한다는 결론을 내포한 것이다. 그렇다면 상전이 까지는 입증 못하더라도 최소한 그 정도는 관찰하고 나서 비로소 주장 되어야 할 이론일 것이다. 암흑 에너지로는 설명 불가능할 것이다 성간 가스의 적색편이 된 온도와 우주의 평균 온도와 일치 시키기 위해서는 이번엔 또 다른 암흑 천사를 등장 시켜야 할 것이다. 이런 식의 마구잡이 설명이 조금이라도 진리일 가능성이 있다는 생각이 들지 않는다.

두 가지 생각의 근본적인 차이는 일반상대론 기반 우주론에서는 우주의 열역학을 닫힌계로서 취급한다는 점이고, 특수상대론 기반 우주론에서는 유한한 우주이면서도 열린계로서 취급한다는 점이다. 무한한 물질과 에너지가 비 가역적으로 팽창하고 있는 우리 우주는 열적으로 열린 우주일까 아니면 닫힌 우주일까? 일단 관찰되는 그대로를 진실로 본다면 열린 우주 혹은 열린 우주와 구분할 수 없는 우주이다. 일반상대론 기반 우주론은 관찰되는 그대로를 부정하고 무언가 숨은 탄힘이 있을 것이라고 상상하고 있는 이론에 지나지 않는다.

2.11 우주원리와 등속팽창

일반상대론 기반 우주론의 기본 가정은 중력이 우주의 팽창에 영향을 미칠 것이라는 것이다. 그러나 특수상대론 기반에서는 그렇지 않다. 우주의 등방성이 만족 되면 어느 특정 방향으로의 힘의 편중이 존재하지 않기 때문에 그런 편중된 힘에 의한 가속이나 감속이 있을 수 없다.

혹 실제로는 가속이나 감속을 하지만 느낄 수만 없는 것도 아니다. 이 우주에는 중력 외에도 실제로 극단적으로 멀리 떨어진 별들 간에 작용하고 있는 힘이 또 하나 존재하고 있는데 그것은 바로 항성들 간의 빛의 압력을

통해 주고받는 힘이다. 약하다는 중력에 비해서도 미미하지만 분명 별들 간에 작용할 수 밖에 없는 광속으로 전달되는 힘으로서 태양과 지구 간에도 작용하고 있는 힘이다. 중성미자에 의해 전달되는 운동량도 마찬가지로 이고 광속보다는 느리지만 그 에너지 입자들도 약간씩 운동량을 전하고 있다. 이러한 힘들은 중력과 다르게 힘을 받는 물체가 관성력을 느낄 수 있는 힘으로서 앞서의 의문을 검증할 수 있는 힘이다. 이 힘들이 우주의 팽창에 영향을 미칠 수 있는가를 따져보면 우주의 등방성 원리에 따라 모든 방향에서 동일한 양으로 전해지고 있으므로 상쇄되어 영향을 미칠 수 없음을 알 수 있다. 여기에서, 또 다른 광속으로 전달되는 힘, 중력이라고 사정이 다르리라고 볼 이유가 없다.

또한 힘에 대한 논의와는 별도로 이 우주론에서 우주의 최 외곽 껍질은 무한대의 질량을 지닌 채 광속으로 팽창하고 있다. 이를 늦추거나 가속시키는 것은 불가능하다. 따라서 최 외곽 껍질이 등속 팽창 함을 인정해야 할 것이다. 이때, 이를 검토해 보면 ' 그렇다면 그 내부는 가속하거나 감속할 수 있는가' , 혹은 ' 우주의 최 외곽만 등속 팽창하고 우주 내부의 밀도 분포는 중력에 의해 시간에 따라 재배치 될 수 있는가' 하는 문제가 등장한다. 답은 ' 우주의 균일성을 포기하지 않는 한 없다' 이다. 이것은 상대론까지 도입할 것도 없고 그냥 기하학의 문제, 갈릴레오의 상대성의 문제이다. 한 점에서 동시에 출발하여 임의의 속도와 방향으로 폭발하여 흩어지는 점들을 생각하자. 그중 어느 점을 선택하더라도 등속 팽창 하는 한 그러한 폭발은 자신을 중심으로 다른 점들이 멀어져 가는 현상으로 관측될 것이고 멀어지는 점들에 아무런 각속도를 측정할 수 없을 것이다. 그러나, 그 팽창 속도가 어느 한 점을 중심으로 하는 중력에 따라 변한다면 다른 점에서는 그 사실을 관측되는 점들의 각속도 생성으로서 알게 될 것이다. 즉 우주의 균일성을 만족 시킬 수 없다.

다만 우주 껍질 내부의 전체 위치 에너지가 팽창에 따라 증가하여 이에 따른 시간의 흐름의 속도 변화는 결국은 전체 팽창 속도에 영향을 미칠 수 있지 않은가 하는 의문은 가능하다. 이는 보다 엄밀한 중력 이론과 함께 따져볼 문제이긴 하지만 한 가지 정성적인 추측을 먼저 내어 놓자면 그러한 위치에너지 변화가 팽창 속도에 미치는 변화는 그러한 위치에너지 변화가 시간이 흐르는 속도 즉 광속에도 영향을 미치므로 광속 대비 팽창 속도는 일정하다 즉 내부의 관찰자에게는 등속 팽창으로 보일 것이다 같은 변명은 미리 준비해 둘 수 있다.

이러한 위치에너지 변화가 우주 배경 복사나 먼 별의 분광 특성에 영향을 미치는가 하는 문제는 알기 어렵다. 일단은 그 영향이 없거나, 있다고 하

더라도 관측이 어려울 정도로 미미하다가 현재까지의 우주 배경 복사 관측의 결과이다. 변할 경우 그 변화가 우주 배경 복사 시대에는 이미 지금과 거의 관측 가능한 차이가 없는 정도여야만 한다는 것이 이미 관측된 결과이다.

이 특수상대론에 기반한 우주론은 크기가 유한하지만 동시에 무한의 특성을 지닌 우주를 기술하고 있으며, 우주의 팽창 속도가 중력에 의해 영향을 받을 수 있다는 생각은 결국은 우주가 유한하다는 가정 하에서만 유효한 생각이다. 일반상대론 기반의 우주론 들은 우주의 무한한 측면을 묘사할 수 없는데 반해 특수상대론에 기반한 이 우주론만이 더욱 심오한 우주의 일 면을 온전히 묘사하고 있다고 생각한다.

중력은 우주의 팽창 속도에 영향을 미칠 수 없다고 결론 내리며, 남은 문제인 분광 특성 등의 더 이상의 자세한 논의는 미래의 차세대 이론이 해결해야 할 영역으로 남겨두는 바이다.

2.12 우주원리와 상대성

특수상대론 적으로는 지금 바로 여기가 우주에서 가장 시간이 빠르게 흐른, 가장 나이 먹은 우주이다.

관측할 수 있는 우주의 다른 영역들은 항상 이곳보다 젊은 새로운 영역들이다. 그렇다면, 직접 거기에 가보면 어떻게 될 것 인가를 살펴보자. 예컨대 $z+1=100$ 정도 되는 먼 곳에 광속으로 날아가서 지구를 되돌아보면 어떻게 보일 것 인가를 따져보기로 한다.

일단 논리적으로는 간단히 답이 나온다. 거기에서 본 지구가 $z+1=100$ 일 것이니 시간의 흐름이 $1/100$ 으로 보일 것이다. 그러므로 그곳에서 느끼는 우주의 나이가 현재 지구에서 느끼는 나이인 약 140억 년 보다 100배인 1조 4000억 년이 될 것이고 지구는 140억 년 나이의 영역에 있는 것으로 보여야 할 것이다.

이것은 상대성 원리에 기반한 추측이다. 실제 계산 결과도 그러한지 한번 확인해 보기로 한다.

먼저 $z+1=100$ 의 속도로 달아나는 영역의 β 값을 구해야 한다. 앞서 구했던 $\beta_p = \frac{zn^2-1}{zn^2+1}$ 식을 사용할 수 있다. 간단히 $\frac{9999}{10001}$ 임을 알 수 있다.

이 영역은 지금 현재 지구와 $\frac{9999}{10001} 140 = \frac{1399860}{10001}$ 억 광년이 떨어져 있다. 따라서 이 영역을 광속으로 따라잡는데 걸리는 시간은 $vt+l=ct \rightarrow t=\frac{l}{c-v}$ 이므로, $\frac{\frac{1399860}{10001}}{1-\frac{9999}{10001}} = 699930$ 억 년이다. 그 동안 그 영역에서 흐른 시간은, $699930\sqrt{1-\left(\frac{9999}{10001}\right)^2}$ 이다. 그리고, 지금 현재 그 영역의 나이는 $140\sqrt{1-\left(\frac{9999}{10001}\right)^2}$ 이다.

그러므로, 광속으로 쫓아 갔을 때 그 영역의 나이는

$$(699930 + 140)\sqrt{1-\left(\frac{9999}{10001}\right)^2} = 14000$$

억 년으로서, 정확히 140억 년의 100배이다. 물론 그 시점에 그곳에서 보는 이곳의 나이는 140억 년이다.

따라서, 우주의 원시 관성계 간의 상대성이 유지됨을 볼 수 있다.

현재까지 등장한 우주론 중에서 우주의 균일함과 우주의 등방성, 즉 우주 원리를 수학적으로 설명한 다른 이론은 없다. 일반 상대론 기반으로 우주의 곡률이라도 측정이 되었으면 간접적으로나마 설명하고 있다고는 할 수 있겠지만 우주의 곡률은 현재로서 부정 되고 있다. 따라서 현재로서는 내가 제시하고 있는 이 이론만이 우주의 균일함을 설명하는 유일한 수학적인 설명이다. 이러한 설명이 가능한 이론과 불가능한 이론 중 어느 것이 진리 인지를 짐작하는 것은 어려운 일이 아니다.

2.13 몇 가지 문제들과 비판

2.13.1 가속 팽창 및 암흑에너지 문제

특수상대성 이론에 기반한 우주론은 등속 팽창 이론이지만 요즈음 많이 문제시 되고 있는 우주의 가속 팽창이나 암흑 에너지 문제에 대한 대답을 가지고 있다.

겔론부터 말하자면 가속 팽창은 겔보기 현상이며 따라서 암흑에너지도 가정할 필요가 없다.

우주 팽창의 겔보기 속도는 거리에 따라 감소하는 것으로 보일 수 있다. 계산 24의 식 중 $r = \frac{2\beta p}{\beta p + 1}$ 과 $\beta p = \frac{r}{2-r}$ 에 내포되어 있는 개념이다. 개념은